# IOANNIS FERNELII AMBIANATIS de proportionibus Libri duo.

Prior, qui de ſimplici proportione eſt, & magnitudinum & numerorum tum ſimplicium tum fractorum rationes edocet.

Poſterior, ipſas proportiones cõparat: earúmq; rationes colligit.

PARISIIS
Ex ædibus Simonis Colinæi
1 5 2 8

## ❧ INDEX HOC OPERE CONTENTORVM, DVPLICI NVmero insignitus: quorum prior folium, posterior caput notat.

L



M



N



O



P



Q

R



S



T



V



FINIS.

## ERRATA

| Fol. | Facies. | Linea. | Legendum |
|---|---|---|---|
| 10 | 1 | donatas | metiantur |
| 12 | 1 | pares | fuerint |

## IOANNIS BAPTISTAE LVSITANI AD EMAnuelem de Tieues, Elegiacum carmen.

An talem vobis natum peperistis Athenæ,
Parrhisio qualem cernimus esse solo?
Partubus ille quidem superum secreta duobus,
Restituit luci quæ latuere prius.
Nunc noua quantorum tetrico proportio vultu
Prodijt, hæc Samij propulit acta sophi.
Non igitur proprios miretur Græcia fastus
Omnia sunt nostris tradita temporibus.
Illa etenim veteri de multitudine certat
At nos vnius ducet ad astra labor.

## ERVDITORVM VIRORVM PATRONO FAVTOrique ſtudioſiſſimo M. Martino Dolet, Ioannes Fernelius Ambianas S.

ANno ſuperiore vt Aſtronomica quædam opuſcula in vulgus propuliſſem, vir facundiſſime, plurimas his interſpergi cæleſtium tum motuum tum quãtitatum cõparationes ſtatim ſum expertus: quarum abſoluta diſcuſſio non eam ſed longe capaciorem aream deſideraret. Proinde breuem quãdam proportionum traditionem ſeiunctim emittere, ſuaſit impenſe ſtudentium commoditas, vt ea non aſtronomicis modo, verum & philoſophicis diſciplinis proprio cuiuſque arbitratu adijci miſceriꝗ poſſet cõmodius: eiuſꝗ opitulatu ad eas diſciplinas ſpes cunctis adoleſceret. Quandoquidem vtrunque diſciplinarũ genus & philoſophicum & aſtronomicũ quippiã gerit penitius obuelatum, quod non ſus quiuis diluerit: ſed id ſane hominis quãtitatum rationibus integrè excercitati fuerit opus haud vulgariter arduum. Habet nec minus ethica philoſophia, in ea præſertim quæ de iuſtitia eſt tractatione, nexus quoſdam inextricabiles ſolaꝗ proportionum ope diſſolubiles. Profert & noſtra medicina mire artificioſam pulſuum agnitionẽ: quam muſica harmonia, & certa proportionũ ratione conſtare tradidit Galenus, tã accurata profecto diligentia, vt hoc reliquorumꝗ mathematũ ſtudio inſigniter effloruiſſe percẽſeatur: in quouis diſciplinarũ genere politiora quæque nec minus operoſa exoſculatus. Quod ſi in cætera quæ illius ſcientiæ ſunt mẽtem obiter deflexeris, omnium natura conſtantium (quanto magis hominum medicamentorumꝗ) compoſitiones, ſtata cõmiſcibilium proportione perfici, in verãꝗ naturam aſſurgere mox intelliges. Nõ itaque prorſus inſcite antiquis philoſophis literarum monimentis conſecratũ eſt, harmoniam vnicum rerum principium eſſe: quo valente ſingula perſiſterent, quóque pereunte diſſoluerẽtur. Id ſanè vt vetus, ita verè Pythagoricum eſt. Varia ergo rei fruge adhortati, arduam, numeriſꝗ Platonicis (vt in prouerbio eſt) ſcatentem proportionũ traditionem ſuſcepimus abſoluendam. Hanc autem in theoremata quædam adigere minus opportunum cẽſuimus: ſed ab antiqua mathematicorum traditione paulum deflectentes, qua licuit verborum parcimonia dicendorum demõſtrationes perſtrinximus: ne in re mathematica parum exercitatis (quibus peroſæ ſupramodum ſunt) nauſeam faſtidiumꝗ parerent: ijs enim plus ſatis faciunt rerum ipſarum axiomata. At quos demonſtrationum iuuat pellicitꝗ præſtantia, ijs indubiè nihil non demonſtratum videbitur: nihil've ex indemonſtratis acceptũ: ni forſan quippiam vſu plurimo, nec abroganda authoritate in communis ſententiæ naturam iamiam abierit. Quibus demum

locis tum Euclidis tum Iordani tradendorum demonstrationes offendantur, non ingrate annotauimus: quo breuitas nostra celebrium authorum testimonijs compensaretur. Hæc itaque sunt vir erudissime, quæ iampridem tuo nomini peculiariter consecrâda habueram: & quæ (mihi credito) non tam in cõmunem studêtium frugem, quàm vt meum in te animum fusius expromerem, in lucem prodire sum perpessus: quũ præsertim longe diuersis obtundar studijs, à quibus vel parumper resilire vix mihi conceditur. Non satis (fateor) te digna, minusq; tibi honori futura est hæc momentanea æditio, vt qui opulẽta humanarum disciplinarum supellectile sis instructus, eaq; sacrarum musarum flosculis splẽdide venustata: qua plerique ditiores excomptioresq; facti, tuo ex ludo velut ab arce fœcundissima certatim prodierunt, celebre id tuum nomen æternæ memoriæ dicantes. At indulgentius (confido) ages cum meo partu, si quid sceleris obiter admissum sit benigne cõdonãs: nec idcirco quippiam calumnię tulerit æquissimum id tuum iudicium, pro amussi quadam alba vulgo receptũ: quandoquidem amicorum gratia ad multa conniuendum esse monemur. Tua igitur mansetudine, mihiq; iamdudum explorata humanitate partum hũc iam vere tuum excipito: exceptumq; amicè foueto: sitq; is pignus ac nunquam dissoluendæ amicitiæ glutinum solidissimũ. Deum optimum interim precor diu ac feliciter nobis viuas in terris, ac demum in æternã prouehare felicitatem. Parisijs apud clarissimum diuæ Barbaræ gymnasiũ, ad calendas Nouembres 1528.

# PROPORTIONVM LIBER PRIMVS, QVO SPECIATIM DE SIMPLICI PROPORtione differitur.

## De proportionis definitione, eiúsque speciebus aliquot. Cap. I.

Quum naturalis Philosophiæ pars optima, quæ motuum tum cælestium, tum reliquorū omnium velocitates, agentiúmque naturalium varios perpēdit effectus, non modo mathematicis demonstrationibus firmata sit, sed & quantitatū rationibus passim cōspergatur: opportunum & imprimis cōducibile visum est horum breuem quandam traditionem facere: ne in philosophica astronomicáque præcepta deductos prorsus deterreant motuum supputationes plurima proportionū abdita præ se ferentes. Varia autem proportionum theoremata, quæ velut earum quædam proprietates sunt, ex Euclide ceu fonte quodam vberrimo discutienda linquimus: à quibus tamen hoc loco demonstranda suam partim ducent originem. Non enim vsqueadeo nuda erit hæc commentatio quin eius quæque dicenda appositis demōstrationibus euidentiam & certitudinē consequātur. Partes duas huiusce effecimus: priore de proportionibus & quantitatū omnium comparatione dicturi: posteriore vero, de proportionum inter se collatione, quæ proportionalitas dici cōsueuit. In hunc vtique modum fieri potest vt de omnibus aptè differatur. Quò igitur notum id sit de quo nostra futura est disputatio, à proportionis definitione sumēdum esse exordium, philosophicus ordo suadet. Hanc sic Campanus tradidit. Proportio, est duarū rerum eiusdem generis ad inuicē certa habitudo. Non solum enim numerorū & magnitudinum est proportio, sed & cunctarum rerum quæ quouis modo comparari possunt: vt sunt motus in velocitate, pondera in grauitate, soni in acutie, aliáque id genus plurima. Nec demum conuenit motum numero comparare, nec magnitudini numerū, ponderi've magnitudinē: quòd ea diuersorum sunt generum: nihilque sit cōmune, in quo diuersa cōparari possint. Non enim celeritas numero, (vt motui) competit: nec magnitudini quatenus talis, grauitas (vt ponderi) est propria. Et si magnitudini & numero quantitas cōmunis sit, alia nihilominus ratione numeri quàm continui quantitatē deprehendimus: neque (ob id) numerum magnitudine maiorē minorémve dicemus. Non incōsultè igitur in definitione dictum est, rerum eiusdem generis. At cuncta quæ inter se cōparantur, siue in grauitate vt pondera, siue in celeritate vt motus, æqualia aut inæqualia dicūtur: suæque inæqualitatis denominationem habent à numero vel magnitudine. Proinde quum ex Aristotele libro prædicamentorum, Maxime proprium quantitatis sit æqualitas vel inæqualitas, vt hac quippiam æquale vel inæquale dicatur, ea omnia quæ nuper cōparauimus, quatenus talia, quantitatis rationem subibunt: vt pondus duarū

librarum,& pondus 4 librarum,hac acceptione seu determinatione quantitatum rationem habent,& prædicamenti sunt quantitatis. Ergo non inscitè Euclides sic proportionē definiuit. Proportio,est certa habitudo seu cōparatio quantitatum generis eiusdem. habitudo,generis locum habet:quæ vox(si res inter se comparatas,vt vulgaris fert opinio,nobis significet)est collectiua, pro duobus saltem extremis inter se cōparatis accepta. Si mauis eam vocem non collectiuam dicere,haud quaquam refragabor:quippe quum pro bipedaneo corpore,quod vnica res est,accipiatur. Bipedaneū enim est ipsummet totum bipedaneum,& sua medietas pedanea:inter quæ certā constat esse habitudinem. Quum certam dicimus habitudinem,non scitam aut scibilem debes accepisse,non omnis enim proportio (ceu mox de irrationali dicetur)cognoscibilis est:verum finitam vt inquit Brauardinus:aut talem qualis est vnà cum Campano intellexeris. Eiusdem generis,dictum est ratione superius exposita:non enim quis apte dixerit quadrupedale duplum ad binariū:sic nec lineam duplam ad superficiem aut corpus. Sub quantitate quascunque res in æqualitate aut inæqualitate comparabiles(vt antè dictum est) cōplectimur: quæ,quatenus huiusmodi,quātitatis aut cōtinuæ aut discretæ rationem subeunt:habéntque inter se aut numerorum aut magnitudinum proportionem.

Altera proportióis definitio.

¶Numerorū proportio,Arithmetica nuncupatur:q; Arithmeticus discretā quantitatem numerorúmq; proportionem tantum consideret. At Geometra nō hoc solum,sed & omniū magnitudinū habitudinem perpendit,ob id'que magnitudinum proportio, Geometrica est appellata. Quum itaq; sit duplex proportio, Geometrica plurimas sub se proportionum species colligit,quas Arithmetica repudiat. Licet etenim lineas inæquales designare (quales sunt diameter & costa quadrati eiusdem)quæ inter se habitudinem quandam habent,nullis numeris aut numerorum fractionibus explicabilem. Duplicem proinde proportionē cōuenit intellexisse,rationalem & irrationalem. Rationalis,est proportio quantitatum inter se cōmensurabiliū seu cōmunicātium. Irrationalis vero,est proportio quantitatum incōmensurabilium seu non cōmunicantium. Quantitates autem cōmensurabiles dicuntur,quarum eadem quantitas minor,pars est aliquota. Partem aliquotā eam esse volunt,quæ aliquoties desumpta,maiorem quantitatem efficit metitúrq;. Sic igitur(vt summatim dicam)vnitas cuiusq; numeri pars est aliquota:item binarius cuiusq; numeri paris. Ob hæc omnes duos numeros inter se cōmēsurabiles,& quorumcunq; duorum numerorum proportionem rationalem dici necessum est. At magnitudinum quædam cōmensurabiles conspiciuntur, vt bipedale & quadrupedale:siquidē pedale alterius medietas est,alterius quarta pars:proinde pars est aliquota vtriusq;. Quædam incōmensurabiles sunt magnitudines,quibus nulla pars communis est:quod nuper de diametro & costa quadrati eiusdem tradidimus:harúmq; omnium proportio est irrationalis:commensurabilium autem magnitudinum proportio rationalis est:quod & Euclides quinta decimi elementorū ad hunc modum significauit. Omniū duarum cōmunicantium quantitatū est proportio tanquam numeri ad numerū.

Proportionis diuisio.

Altera diuisio.

¶De hac ergo rationali proportione in primis differētes,in æqualem & in-

Rationalis proportionis subdiuisio.

æqualem eam distinguemus. Proportio æqualitatis, est quantitatum inter se æqualium habitudo: velut comparatio binarij ad binarium, & bipedanei ad bipedaneum. Proportio inæqualitatis, est quantitatũ inter se inæqualium habitudo. In ea habitudine aut quãtitas maior ad minorem refertur, estq; proportio maioris inæqualitatis: qualis est 4 ad 2. Aut minor quantitas ad maiorem cõparatur, eámq; minoris inæqualitatis proportionẽ dicunt: quam videre licet 2 ad 4. Non incõmode igitur 2 & 4 sunt proportio maioris & minoris inæqualitatis: idq; numeris bifariam collatis. Proportionis æqualitatis nullæ species sunt: at tum maioris tum minoris inæqualitatis quinque species præfiniuntur: multiplex, superparticularis, superpartiẽs, multiplex superparticularis, & multiplex superpartiẽs. Singulis his membris adiecta hac vocula sub, membra diuidentia proportionẽ minoris inæqualitatis emanabũt: quod & in cunctis, quæ sequũtur, diuisionibus est attẽtius obseruãdum.

Inæqualitatis diuisio.

Quinq; specierum proportionis definitiones.

℄ Multiplicem proportionẽ eam dicimus in qua maior quãtitas minorem pluries in vnguẽ cõplectitur: vt proportio 6 ad 2, in qua 6 ter 2 exactè colligit: vt demũ proportio octupedalis ad bipedale. Superparticularis proportio, ea est cuius quãtitas maior minorẽ semel, simulq; minoris partẽ aliquotam cõprehendit: ceu 10 ad 8: 3 ad 2: & tandem cuiusuis numeri ad proxime minorem collatio. hanc sic dictã credendum est ꝙ maior quãtitas super minorẽ, partẽ eius, quæ aliquota est, cõtineat. Superpartiens proportio, ea vocatur in qua maior quãtitas minorẽ semel, & præter eam, minoris plures partes habet: partes hic appellant, plures aliquotas nullam aliquotã constituẽtes: cõsentaneè ad primã primi elemẽtorũ Iordani, & ad quartã 7 Euclidis. Omnis numerus minor, maioris aut pars est, aut partes. huius generis est ꝓportio 7 ad 4: septenarius quippè ex quaternario & ternario ( qui partes eius est, siue pars nõ aliquota) constat. Dictionis significationem, sua compositio manifestat: ꝙ enim super minorem maior quãtitas minoris partes contineret, est appellata. Multiplex superparticularis dicenda est quum maior minorem pluries, eiúsque partem aliquotam in vnguem complectitur: velut est cõparatio 10 ad 4: quandoquidem denarius ex 4 bis sumpto, & 2 qui quaternarij est medietas, exacte perficitur: ita de proportione septupedalis ad bipedale est censendum. Multiplex superpartiens inter eas quãtitates reperitur, quarum maior minore pluries sumpta, eiúsq; partibus seu parte non aliquota constat adamussim: talis est proportio octonarij ad 3, quum 8 bis 3, duásque eius tertias, quæ nullam partem aliquotam efficiunt, comprehendat.

## ℄ De reliquis proportionum speciebus. Cap. II.

QVæ nuper exposita sunt proportionũ genera, non paucas sub se species colligunt: quas in hunc ordinem referre est opportunũ. Multiplicis ꝓportionis species, vt numeros, in infinitum abire plus satis est manifestum, omniúmque prima est dupla, hanc sequitur tripla, triplam quadrupla, sic & deinceps. Duplam eam dicũt multiplicẽ cuius quãtitas maior, minorem pluries æquè comprehendit: talis est 6 ad 3. Inter has quãtitates, quę maior est, dupla alterius appellatur, & quę minor, subdupla.

Multiplicis species.

Tripla proportio erit inter eas quantitates, quarum maior minorē ter in vnguem ſuſcipit: quadrupla, ſi maior minorem quater contineat: decupla, ſi decies: & centupla, ſi centies. ¶Superparticularis proportionis non pauciores ſanè ſpecies ſunt: quarū diuerſitas ex diuerſitate partis aliquotæ proficiſcitur, quā ſupra minorē quantitas maior colligit. Prima omniū ſpecies eſt ſeſqualtera, in qua maior quantitas ex minore & eiuſdem ſemiſſe adamuſſim conſtat & efficitur: vt eſt 9 ad 6: quòd in 9 ſenarius & ternarius ſenarij medietas conſpiciātur. Seſquitertia proportio, inter eas eſſe quātitates cēſebitur, quarū minor, minoriſ'que tertia pars, maiorē conſtituunt: hæc eſt duodenarij ad 9, 4 ad 3, & 8 ad 6. Si pars aliquota quæ præter minorem quantitatē in maiore continetur, ſit quarta minoris, ſeſquiquartam eam dicere proportionem conueniet, vt 10 ad 8. Si vero pars ea, quinta ſit minoris, ſeſquinta proportio vocitabitur: vt tādem in caput vnum rem colligamus, ab ea parte aliquota minoris quantitatis quam præter minorem maior ipſa ſuſcipit, proportio ſuam ſortietur appellationem. Quum itaq; nullus omnino ſit aliquotarum partiū terminus, innumeræ proculdubio ſpecies fuerint proportionis ſuperparticularis. ¶Proportio ſuperpartiens, plurimas identidem ſpecies habet, ſuperbipartientem, ſupertripartientem, ſuperquadripartientem, aliáſque innumeras, quas naturalis numerorum ordo ſatis aperit. Superbipartiēs proportio, ea eſt cuius quātitas maior præter minorem duas minoris partes aliquotas, quæ etſi iungantur ne vnam quidem efficient, complectitur: quòd ſi duæ partes illæ, duæ ſint tertiæ minoris, ſuperbipartiēs tertias appellabitur: velut eſt habitudo inter quincupedale & tripedale concepta: & quæ eſt inter 10 & 6. At ſi duæ ſint quintæ minoris, proportio erit ſuperbipartiēſquintas, qualem præbent 7 & 5. Superbipartienſſeptimas ſtatim inter 9 & 7 conſpicietur, quū 9 præter 7 duas vnitates, quæ duæ ſunt ſeptimæ ſeptenarij, colligat, nullam eius partē aliquotam conficientes. Per cæteras ſuperbipartientis ſpecies progredi pro iam cœpta ſerie, nemini arduum videbitur. Supertripartiens proportio, definienda eſt cuius maior quantitas minorem & minoris tres partes nullam aliquotā conficiētes æquè colligit. Quòd ſi tres eæ partes tres quartæ fuerint, proportio ſupertripartiēſquartas appellabitur: vt eſt 7 ad 4. Et ſi tres quintæ, partes illæ fuerint, ſupertripartiēſquintas erit: velut 8 ad 5. Supertripartientēſextas nullam eſt reperire, quòd ea ſeſqualtera ſit: at ſupertripartiēſſeptimas inter 10 & 7 cōſpicitur. Proportio ſuperquadripartiens, ea ſolet appellari in qua quātitas maior præter minorē minoris quatuor partes nullam eius aliquotam reddentes, exactè continet: dum illę quatuor quintæ fuerint, ſuperquadripartiēſquintas erit: vt inter 9 & 5. Si quatuor ſeptimæ, ſuperquadripartienſſeptimas eſt dicēda: nulla autem ſuperquadripartienſſextas propriè dici poteſt. ¶Quò tamen harum denominationum doctrina abſolutior ſit, iuuabit regulas paucas ſubnectere: quarū hæc ſit prima. Proportio nulla ſuperpartiens ambas ſuas denominationes habere poteſt à duobus numeris quorum prior pars ſit aliquota poſterioris: nam proculdubio quæuis eius generis, ſuperparticularis eſt. Ob id igitur nulla eſt proportio ſuperbipartienſſextas, nulla ſupertripartienſſextas, nulla ſupertripartienſnonas, nulla ſuper-

Superparticularis ſpecies.

Superpartientis ſpecies.

Regulæ denominandarum proportionum. Prima.

quadripartiensoctauas, nulla denique superquincupartiensdecimasquintas. Secunda regula, nunquam proportio superpartiēs denominari potest à duobus numeris, quorum prior est partes numerales posterioris. Partes numerales, partes aliquotas dico quę non vnitates sunt, sed numeri, nullam aliquotā efficiētes. Hac de causa ꝓportio quæ est 15 ad 9, nō appellabitur supersextupartiensnonas, ꝙ sex nonæ, duæ sint tertiæ: ea itaq; erit superbipartiēstertias: sic propemodum nec 10 ad 6 proportio dicetur superquadripartiensſextas, sed superbipartienstertias. Ex his duabus regulis colligi potest nullam superpartientem à duobus paribus numeris denominationem sortiri: quum quilibet numerus par alterius paris maioris sit pars aliquota, aut partes numerales. Tertia regula, superpartiens proportio non suscipit denominationem à duobus numeris, quorum prior maior est posteriore, aut æqualis ei. Quandoquidem omnis eiusmodi proportio aut multiplex, aut multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens conspicitur. Nulla idcirco dicenda est supertripartienstertias, nulla superquadripartienstertias, aut supersextupartiēstertias. de his plura capite quarto. ¶Multiplex superparticularis proportio, ea est cuius maior quantitas pluries minorem & eius partem aliquotam æquè colligit. Hoc proportionum genus quum duobus præcedentium membrorum coalescat, illorum autem quodque species innumeras colligat, necessum quidem fuerit huius quoq; membri innumeras species esse: tum ratione multiplicitatis, tum ratione (vt sic loquar) superparticularitatis. Ratione quidem multiplicitatis, eius species sunt dupla superparticularis, tripla superparticularis, quadrupla superparticularis, & cæteræ in infinitum deductæ. Harum rursus quælibet innumeras species comprehendit: dupla quidem superparticularis has, duplam sesqualteram, duplam sesquitertiam, duplam sesquiquartam, & cæteras quæ ordine sequuntur. Triplæ superparticularis hæ sunt species, triplasesqualtera, triplasesquitertia, triplasesquiquarta, & quæ sequuntur. Plus satis facile est cæteras species vtrinque conficere, quarum definitiones ex antè traditis dilucidę fiunt. Nam in duplasesqualtera maior quātitas minorem bis eiusq; medietatē habet: quod deprehendere est inter 5 & 2. Inter 7 & 3 est dupla sesquitertia, quod 7 bis 3 & ternarij tertiam partem suscipiat. Tripla sesquiquarta in his quantitatibus est, quarum minor eiusque quarta, maiorem in vnguem cōponunt: hæc inter 13 & 4 reperietur: tripla sesquitertia inter 10 & 3: nō maius sanè fuerit negotium in reliquis definiendis. ¶Multiplex superpartiens proportio, in his quātitatibus est quarum maior minorem pluries, & partes eius nullam aliquotā reddentes colligit. At si bis maior minorē habeat, dupla superpartiens dicetur: si ter, tripla superpartiēs: si sexties, sexcupla superpartiens. Duplæ superpartientis cæterarumque specierum aliæ rursus species sunt innumeræ, ex diuersitate partis non aliquotæ ortum trahentes. Quum nempè maior quantitas bis minorē cum tertijs duabus eiusdem apprehēdit, dupla superbipartienstertias nūcupatur. qualis est 8 ad 3: octonarius quippe ex ternario bis sumpto & duabus vnitatibus (quæ ternarij sunt duę tertiæ) exactè cōficitur. Duplā superbipartiētequintas inter 12 & 5 cōstituemus: ꝙ 12 ex 5 bis accepto & duabus vnitatibus, quę duę eius

Secunda.

Tertia.

Multiplicis superparticularis species.

Multiplicis superpartiētis species.

quintæ ſunt,conſtet. Quò tãdem omnia in ſummam vnã redigãtur,hæc duo membra,quippè multiplex ſuperparticularis & multiplex ſuperpartiẽs,hoc vnico à ſuperparticulari & ſuperpartienti diſcrepant,ꝙ in his minorem quãtitatem in maiore tantum ſemel reperire ſit,in illis autem pluries.

¶ Vt cuiuſque proportionis oblatæ rationalis terminos conſtituamus. Cap. III.

Ordo dicendorum.

TRia ſunt potiſſima quæ ſi cum appẽdicibus plane diſſoluantur,nihil ſupereſſe arbitror quod in proportionũ materia optare poſſis. Primũ, vt cuiuſꝙ proportionis extrema ſtatuãtur. Alterũ,vt quauis oblata quãtitate,quãuis proportionẽ tum maioris tum minoris inæqualitatis adeã præfigamus. Tertiũ,quænã proportio ſit inter quaſuis oblatas quãtitates referat. Hęc autẽ primo in rationalib⁹, mox in irrationalibus quãtitatibus,& tandẽ in ꝓportionalitatibus nitemur diſcutere. Primũ quò impreſentiarũ diluamus,primos numeros cuiuſꝙ proportionis tradere ſufficiet,ꝙ omnis ꝓportio in numeris accepta poſſit ſubinde in magnitudinibus reperiri,ad hęc igitur ſunto documẽta. ¶ Primũ,omnis multiplex oblata proportio inter ſuum denominatorẽ pro vno extremo, & monadẽ pro altero cõſtituitur: iiꝙ primi fuerint termini ꝓportionis illius. Centupla idcirco inter centum & vnum,tanquã primos terminos eſt: octupla inter 8 & 1. Hinc fit multiplicis proportionis ſpecies omnes enaſci numeris naturali ſerie continuò locatis,ſi ſequentes omnes ad vnitatẽ ſigillatim cõparentur. Porrò omniũ multiplicium proportionũ minima eſt dupla: maximã autẽ dediſſe nemo præſumat: omnis ſiquidem multiplex maiorẽ ſupra ſe(vt numerus)habet multiplicẽ,per 52 noni elementorũ Iordani. Duplæ proportionis terminos omnes procreabis,ſi pares numeros ſuũ in ordinẽ redegeris, naturali numerorũ ſerie ab vnitate mox illis ſubſtituta,in hunc modum.

Extrema multiplicis quo pacto ſtatuantur.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordo naturalis parium numerorum | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| Ordo naturalis omnium numerorum | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Triplæ proportionis ſpecies ſingulæ emanabunt,ſi inferior ordo naturalem numerorum ſeriem habeat,ſuperior autẽ numeros à ternario inchoates ſeſe ternario ſuperãtes: ita vt prima tripla inter 3 & 1,ſecunda inter 6 & 2 conſpiciatur. hac propè formula.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri ſeſe ternario excedẽtes | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |
| Naturalis numerorum ſeries | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

Opinor neminẽ iam ignorare qua via quadruplæ alteriuſve multiplicis proportionis cunctos terminos liceat figura indicare: ſi nempè ſuperior ordo à quaternario exorſus,numeros habeat ſe quaternario ſuperãtes,quadruplæ: ſi à quinario ſe per 5 vincant, quincuplæ omnes creabuntur,inferiori ordine naturalem numerorum ſeriem in cunctis præ ſe ferente. ¶ Secundum documentum,ſuperparticularis omnis proportio primos terminos habet ſuũ denominatorem,& qui eum proxime ſequitur numerũ. Ob id ergo ſpecies omnes ſuperparticularis exurgent,in naturali numerorum ſerie quouis maiori numero ad proxime minorem collato. Numerum dico,ne ſub his forſan vni-

Extrema ſuperparticularis.

tatem inſcitè cōprehendas:binarij ſiquidem ad 1, dupla eſt proportio:at ternarij ad 2,ſeſqualtera:ſeſquiſeptima autē inter 8 & 7,à quo eſt ſeſquiſeptimæ denominatio locaẗ. Superparticulariū proportionū maxima eſt ſeſqualtera, minima tamen nuſquā eſt ex ſecunda parte 52 noni Iordani:quandoquidem minimā totius aliquotam partem dare nō eſt,maxima autē eſt medietas:hoc itaq; vno aduerſatur ſuperparticularis multiplici,ꝙ omnis ſuperparticularis ſub ſe minorē admittat ſuperparticularē, quodq́; ea minor ſit ſuperparticularis quam maior numerus nuncupat:quæ prorſum inuerſo modo in multiplici proportione accidere cōpertū eſt. Ac obiter cuiuis proportioni à numero vel numeris ſuam(etſi impropriè)damus appellationem,cunctos ferè qui proportionum meminerūt impreſentiarum ſecuti:duplam & ſeſqualteram à binario,triplam & ſeſquitertiā à ternario indiſcriminatim appellātes:rurſum ſupertripartientē quartas à ternario & quaternario,duplā ſupertripartiētem quartas à binario ternario & quaternario,vocitantes. Verum hanc non eſſe appellationem ex mathematicorum inſtituto,quum amplior rei huius ſermo inciderit libro ſecundo demonſtraturi ſumus. Superparticularis ſeſqualteræ termini omnes prodeunt,inferiori loco pariū numerorū ſerie locata,ac ſuper hunc numeris à ternario,ſeſe etiā ternario ſuperantibus. Fient proinde primi termini 3 & 2,ſecundi 6 & 4,quod hinc conſpicere licet.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri ſeſe ternario ſuperantes | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 |
| Naturalis numerorū pariū ſeries | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |

Seſquitertiæ omnes ſtatim apparebunt,ſi locus inferior numeros continua ternarij adiectione procreatos recipiat:ſuperior autē, numeros quaternario ſeſe excedentes:velut hic apparet.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri ſeſe 4 ſuperantes | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| Numeri ſeſe 3 ſuperantes | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |

Hinc modus plane innoteſcit quo cæterarum ſpecierū ſuperparticularis termini cuncti ſtatuātur:ſemperq; id fore neceſſarium eſt,vt numeri ſuperioris ordinis ſeſe vnitate magis excedant quàm numeri ordinis inferioris:velut ſi inferiores ſeſe quaternario ſuperent,quinario ſeſe excedent ſuperiores,ſi nihil prorſus erratum ſit. ¶ Tertium documentum,ſuperpartientis proportionis (quarumcunq; fuerit denominationū)primi termini ſtatim ſe offerūt ambobus denominatoribus pro vno extremo coniunctis, pro altero autem denominatione maiore accepta. Quum igitur ſupertripartienſquintas à 3 & 5 nūcupata ſit,hos coniungēs numeros 8 maius extremū procreo:inter quod & 5 poſteriorē denominatorē,oblata cēſebitur proportio ſupertripartiēſquintas. Pari lege ſuperquadripartiēſnonas inter 9 poſteriorem denominatorem & 13 denominatorum adiectione conſurgentē,deprehendetur. Superpartientium proportionum minima dabilis eſt gratia prioris denominatoris,eaque eſt ſuperbipartiens,quæ ſuper ſe innumeras ſuſcipit maiores, ſupertripartientem, ſuperquadripartiētem,& alias quæ ſequuntur. Porrò,grana denominatoris poſterioris maxima dabilis eſt,& nō minima:maximā autem dixero ſuperpartientemtertias. At ſi denominatorē vtrūq; perpēdamus,nec maxima nec minima deſignabilis eſt quę denominatorem vtrunq; ſuſcipiat:per corollariū

Extrema ſuperpartiētis

ẏi noni elemētorum Iordani, verum quauis electa, vt ſuperbipartiētetertias, maior reperietur, quæ ſupertripartiēſquartas, & minor quæ ſuperbipartiēſquintas. ſed de his fuſius poſt hæc eſt differēdum. Superbipartientis ſpecies omnes conſurgunt, inferiori loco cōſtitutis numeris à ternario naturalem ſeriem tenentibus: ſuperiori autem ordine numeris cunctis imparibus à quinario inchoatis. Nam inter primos numeros ſuperbipartienſtertias erit: inter ſecundos ſupertripartienſquartas: quod hinc conſpicito.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri impares à quinario | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| Naturalis ſeries à ternario | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Hæ ergo ſunt ſpecies omnes, à priori denominatore vocatæ: ſcilicet ſuperbipartiens, ſupertripartiēs, ſuperquadripartiens, & aliæ: maximé tamen arduū fuerit ſpecies omnes ab ambobus denominatoribus figura declarare. Superbipartientes omnes, ſupertripartientes, ſuperquadripartiētes poſſunt ſigillatim explicari: quum nihilominus ea diſquiſitio quàm vtilis magis curioſa ſit, ſatius eſt ad ea quæ tradita ſunt & mox erant tradenda, hoc vnicum tenuiſſe præceptū. ¶ Ex documentis prȩſentibus, oblatæ proportionis primos terminos vt inueneris, ſtatim eos duplans, ſecūdos terminos: triplans, tertios: quadruplans, quartos: aſſiduáque multiplicatione omnes proportionis eiuſdem terminos cōflabis: quos ſubinde in figuram, ſi lubet, diſpones. Vt enim inter 7 & 4 proportio eſt ſupertripartiēſquartas, ſic inter 14 & 8 duplos eorum: ſic rurſus inter 21 & 12 triplos eorundem: potes & quibuſuis multiplicibus numeris acceptis eam ipſam ptoportionem intueri. Præceptum hoc demonſtrationem habet 19 quinti, pendétq; ex 14 ſeptimi elementorum Euclidis, & 16 quinti: conſtitutis ſiquidem his 4 numeris proportionalibus 7, 14, 4, 8, ſicut ſe habet primus ad ſecundum ſuum duplum, ita tertius ad quartū, per ſextā definitionem quinti: ergo permutatim vt primus ad tertium, ita ſecundus ad quartum. Idipſum cōſpicies in ſuperparticularibus, conſtitutis his 4 numeris, 12 15 8 10, vbi primus ad ſecundum, & tertius ad quartum proportionem habet ſubſeſquiquartā: permutatim quoq; ſicut primus ad tertiū, ita ſecūdus ad quartum proportionē habebit ſeſqualteram. Generatim ergo, qualis eſt inter quoſuis datos numeros proportio, talem eſſe non modo inter eorū multiplices, ſed & quoſuis, qui ad illos aliquam habent proportionē aut maioris aut minoris inæqualitatis, eſt proclamādum. Reliquum eſt autē demōſtrare terminos omnes cuiuſquam proportionis primorum terminorum multiplicatione produci: nullóſq; reperibiles eſſe qui ad primos non ſint multiplices. Datis enim aliquibus qui gratia exempli ad primos ſint ſeſqualteri (nō ſanè refert quid pro demōſtratione faciēda in exēplum adduxero) ſi igitur ſeſqualteri ſunt ad primos, primi medietates habent, & quū talis ſit medietatū inter ſe proportio qualis totorum per quintā quinti, primi ſub ſe minores patiētur terminos proportionis eiuſdem, & tandem primi nō erunt primi: ſeu minimi non erunt minimi, quod maxime repugnans eſt: ita prorſus fuerit ſi ſecundos ſuperparticulares aut quouis modo ſuperpartientes eſſe dixeris ad primos. Relinquitur itaq; omnes duos terminos alicuius ꝓportionis aut primos eſſe aut ad primos multiplices: non his tamen obuiat quartos terminos alicuius

Cuiuſq; proportiōis termini omnes vt ſtatuātur.

proportionis superparticulares esse ad tertios:nam 12 & 8 proportionem habent sesqualterā,item 9 & 6 suntq; illi sesquitertij ad hos:12 quidem ad 9,& 8 ad 6. Hæc demonstrare conueniebat,quò absolutiora prorsusq; hæsitationis expertia forent quę tradentur. ¶Quartum documentū,quum omnis oblata multiplex superparticularis proportio duos saltē denominatores admittat, ducto priori in posteriorē totiq; adiecta vnitate,extremum maius coalescit, quod ad posteriorē denominatorē data se habet ꝑportione. Si nēpe quis primos ex te terminos optet inter quos tripla sesquiquinta cōstituitur ꝑportio, statim vt hanc proportionē perceperis à ternario & quinario nominari,ducēs 3 in 5,15 creabis:adiectaq; vnitate,16 maius extremū quod ad 5 proportionē retinet triplam sesquiquintā,exorietur. Pari arte nullo negotio cēsueris quadruplam sesquitertiam 13 & 3 primos terminos habere. Inter has proportiones nec maxima pręscribi potest,nec minima,quādoquidem à multiplicitate maxima nusquā est,nec demū minima à particularitate,velut ex antè dictis dilucidum euasit:proinde si ambas denominationes misceamus,maximā vel minimā proportionē ex ambabus appellatā præfigere,repugnans proculdubio videbitur. Arduum sanè fuerit harum proportionū terminos omnes tabella exprimere:idq; prorsus ab arte seiunctum est, ꝙ ex ambabus denominationibus innumeræ specierū diuersitates oriantur. Quamobrem plus satis fuerit primis notis terminis cæteros deinceps exposita arte venari:quos subinde tabulæ(si omnium vnica capax sit)inserere conueniet. ¶Quintum documentum,primi termini cuiusquā multiplicis superpartientis oblatæ,sunt numerus ortus ex ductu primi denominatoris in vltimū medio denominatore his apposito,& denominator vltimus,qui minus erit extremū proportionis. Velut dum primi termini quærūtur proportionis duplæ superbipartiētis tertias,ternarius qui denominator est vltimus,statim minus extremum apparebit:mox ducto binario primo denominatore in 3,senarius orietur,cui iūctus binarius denominator medius,octonariū reddit extremū maius:erit igitur inter 8 & 3 prima dupla superbipartiens tertias. Ad hūc modū existimādum est primā triplam supertripartientēquartas inter 4 pro extremo minori,& 15 pro maiori reperiri. Maximā multiplicē superpartientem aut minimā à triplici denominatione præfigere,nequaquā est possibile:quum præsertim simplex superpartiens & maximam & minimam repudiet. In præfiniendis alijs harumce proportionū extremis,præstitutum præceptum imitare. Habes ergo summatim his quinq; documentis cuiusq; proportionis designandæ terminos omnes,quos non modo in numeris,verum etiā in magnitudinibus & alijs quæ quantitatis rationē habent,licet sigillatim reperire. Nec horum demonstrationem aliam quis mediocriter eruditus exposcet,quàm singulorum membrorum definitiones:his enim planè constat operationum ratio.

Extrema multiplicis superparticularis.

Extrema multiplicis superpartientis.

¶ De vulgarium fractionum reductione,& earum mutua comparatione. Cap. IIII.

Solas numerorū proportiones tradidisse,nihil præ se fert difficultatis:eáq; prorsus incompleta,nec minus artificio carens est tractatio:decet proinde circa quātitates cōtinuas hic obiter versari. Quū

autem earum diuiſiones tāta ſint varietate,vt ſi eas efferre velim voces ſtatim deſint quibus eas appellem,niſi fractis vtar numeris(non enim centeſimā pedanei partem,alio quàm hoc fractionis nomine nūcupare poſſimus) operæpreciū arbitror hoc loco prius quàm ad ſequentia progrediamur,de his quoad ſuffecerit egiſſe.

Quid fractio.

Fractionem itaq; nihil aliud dixeris quàm partem rationalem totius:rationalis autem ea eſt pars,ad quam totum rationalem habet proportionem:erit tādem fractio,pars aliquota aut partes totius.

Fractionum varietas.

Eſt autem fractio triplex, Aſtronomica, Geometrica,& Vulgaris. In Aſtronomica,totus circulus in ſex ſigna phyſica diſpeſcitur:ſignū in 60 gradus, gradus in 60 minuta:minutum in totidem ſecunda,ſic & deinceps. Geometræ alijs vtūtur fractionibus,milliariū ſiquidem ſtadia 8 aiunt ſuſcipere:ſtadium,125 paſſus: paſſus denique 4 cubitos habet:cubitus,pedem cum ſemiſſe:pes,4 palmos: palmus,4 digitos:digitus,4 ordeacea grana:nec vltra procedit vſus. Vtrauis harū fractionum partibus magnitudinū exprimēdis vtimur:at quoties pars quæpiā magnitudinis minus cōmodè poteſt aut Aſtronomica aut Geometrica fractione declarari,ad vulgarem ſtatim conuertimur. Nam tertiā partē palmi ſic appellamus,q nec digitis,nec granis expromi queat. Nec alienum cuiquam videatur q fractiones omnes tum Aſtronomicæ tum Geometricæ, vulgaris quoq; fractionis denominationē recipiant,nec contrà tres etenim pedes vnius paſſus,tres ſunt quintæ eiuſdem:at duę tertiæ vnius paſſus nō aliā denominationem habebunt. Sub his,numorum fractiones & quaſuis alias effictas colligi debere,nemo eſt qui dubitauerit.

Vulgarium fractionum expreſſio.

¶ Cæterum,duos numeros (vt exprimatur)exigit omnis vulgaris fractio:quos ſcribentes linea perbreui diſtinguimus,altero ſurſum altero deorſum manente. Qui ſuper lineam eſt, numerator dicitur:alter,denominator. Ad hunc ergo modum ſignificauero quatuor ſeptimas $\frac{4}{7}$: vbi 7 denominat quæ partes ſint aliquotæ integri:4 vero quot eæ ſint aperit:ob id ille denominator erit,hic autē numerator. Vulgarem fractionem duplicem dicunt:hanc ſimplicē,illam fractionis fractionem, cū determinatione. Fractionis ſimplicis,numeri omnes in recto proferūtur, & ſcriptos linea dirimit:vt ſunt quinque octauæ $\frac{5}{8}$. Fractio fractionis plures habet & numeratores& denominatores:primus numerator & primus denominator in recto caſu proferuntur, reliqui omnes in genitiuo. Et numeri in nominatiuo prolati(ſi fractionē ſcribere lubet)in ſiniſtra parte conſtituūtur, linea,vt prius eſt dictum,ſeparati:qui in genitiuo proferūtur,dextram partē habēt nulla interueniente linea. Duæ itaq; quintæ trium ſeptimarū ſic literis diſponētur $\frac{2}{5}\ \frac{3}{7}$:& tres quartæ duarū tertiarum,ſic $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$. Si forſan optes nouiſſe experimento partē quæ ab hac poſteriore fractione nomen habet,totum integrum diuide in tres partes æquas,mox duas illarū ſimul acceptas in 4 diſtingue:nam tres ex his quartis erunt tres quartæ duarum tertiarum:quod in cunctis proportione eſt efficiendum: ſunt autem $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$ medietas totius, quod. hinc velim conſpicias.

Duæ tertiæ



Tres quartæ duarum tertiarum.

Hæc demum fractio plures comprehendens denominatores in genitiuo, $\frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{1}{4}$ , nobis indicat quatuor ſeptimas trium quintarū vnius quartæ. Poſſunt aliæ plurimæ fractionū mixtiones fieri,quas pro expoſito modo diſtinguere cōueniet. De earum autem omniū reductione,ſunt

hæc documenta præmittenda, quod difficile sit non reductas in vsum cōuertere. ¶ Primum documentum, integrorum numerus per fractionis denominatorem multiplicatus, numerū fractionū præbet quibus ea integra æquipollent. Vt si lubeat 4 pedanea corpora in suas nonas resoluere, 4 per 9 multiplicabuntur, hincque fient $\frac{36}{9}$, quæ 4 pedaneis æquales sunt. Inuerso operationis tenore, fractiones in inregra cōuertentur, si numerator per denominatorem diuidatur. Quo pacto dicendum est $\frac{35}{7}$, quinque integra reddere: & $\frac{37}{5}$, septem integra cum $\frac{2}{5}$: ita enim volunt numeratorum diuisiones per denominatores factæ: in quibus quum aliquid residuum manet, id à prioris fractionis denominatore vocabitur. ¶ Secūdum documentū, fractio omnis in aliā fractionē siue maiorem siue minorē mutabitur, si numerator reducendæ fractionis per denominatorem alterius ad quam fit reductio ducatur, mox diuidatur proueniens per denominatorem reducendæ. In exemplo, $\frac{8}{12}$ ad $\frac{4}{6}$ reducētur: & $\frac{10}{15}$ ad $\frac{4}{6}$, nam multiplicādo 6 per 10, 60 fiunt: quibus per 15 diuisis, 4 relinquūtur in quotiente, quæ sunt 4 sextæ. Nonnūquam absoluta operatione quippiam relinquitur: id autem fractionis cuius erat pars denominationem retinebit, vt quum $\frac{10}{13}$ reducendæ sunt ad quintas, ductis 10 per 5, 50 cōcrescunt, quæ vt per 13 diuiseris, 3 quintas in quotiente cōspicies manētibus vndecim decimistertijs vnius quintæ. Ergo $\frac{10}{13}$, sunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{11}{13}$ $\frac{1}{5}$. ¶ Tertium documentum, vt fractiones simplices diuersarum denominationum in eandem tertiam mutentur, denominator in denominatorē ducendus est, fietque denominator cōmunis: rursus vtriusque numeratore in alterius denominatorem ducto, producta iungemus quò subinde numerator cōmunis succrescat. Quum itaque fuerint $\frac{4}{7}$ & $\frac{5}{9}$ ad eandem fractionē tertiam reducendæ, multiplicatis 7 per 9, fiunt 63 denominator cōmunis: ductis præterea 4 in 9, fiunt 36. & ductis 7 in 5 fiunt 35, quæ iuncta numeratorem cōmunem constituunt 71: erunt ergo $\frac{71}{63}$. At quoties plures q̄ duæ simplices fractiones sunt, id de duabus in primis est absoluēdum: mox idem ex recens producta & tertia effecisse oportebit. Vt si debeāt $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{5}$ in eandem cōuerti, sic procedam. ter 4 sunt 12 denominator cōmunis: item bis 4 sunt 8, & ter 3 sunt 9: quum itaque 8 & 9, 17 efficiant numeratorem cōmunem, erūt duæ primæ fractiones reductæ ad $\frac{17}{12}$. Porrò ita rem absoluā, quinquies 12 sunt 60 communis denominator: & quinquies 17 sunt 85, item ter 12 sunt 36, hæc vt iungentur, 121 cōmunem numeratorem declarabunt. Aequipollent ergo tres illæ simplices fractiones, $\frac{121}{60}$. hoc documentum frequenti est in vsu, quod duæ fractiones semper in tertiam exacte conuertantur, raro tamen vna simplex in alteram reducitur quin quippiam nō reductum & indiuisum maneat: id autem maxime obest ne oblatarum quātitatum proportionem in vnguem designemus. ¶ Quartum documentum, fractiones fractionum ad simplicem fractionem reducentur, ductis denominatoribus earum interse: sic enim denominator cōmunis efficitur: & ductis inter se numeratoribus, cōmunis earum fit numerator. Vt quum animo est $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ in simplicem fractionem cōuertere, 3 per 2 multiplicans, 6 cōmunem numeratorem facio: & 4 in 5 ductis 20 denominator cōmunis cōstituitur. fiunt ergo $\frac{6}{20}$. Item propositis $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$, duco 3 in 2, & ortum 6 rursus duco in 3, fiuntque 18 numerator cōmunis. Sic ferè in

Integrorum in fractiones conuersio.

Fractionis in aliam fractionem conuersio.

Plurium fractionum in eandem conuersio.

Fractio fractionis, vt in simplicem vertatur.

denominatoribus, 4 duco in 3, & 12 confectum in 7, fitq; denominator 84. quare fractiones illæ $\frac{18}{84}$ æquiualent. Eadem prorsus ars fuerit etsi longe plures fractiones sint in obliquo. Iuuaret (nec dubito) modum quẽpiam facilem de abbreuiatione fractionum in hũc ordinem redigere, at ꝙ similis post hæc futura sit tractatio, in sextum caput rem integrè discutiendam transferemus.

Fractionum cõmunicantium comparatio.

¶ Nunc autem adijcienda sunt documenta, quibus inuicem comparatarum fractionum quænam maior sit aut minor statim deprehendamus. Sit igitur primum hoc. Fractionũ simplicium diuersarum, si denominatores æquales cõperiantur, ea maior est censenda cuius numerator est maior: sunt nempè $\frac{5}{8}$ maiores $\frac{4}{8}$. Rursus, quum numeratores æquales sunt, maior ea iudicabitur cuius denominator est minor: vt $\frac{3}{5}$ maiores sunt $\frac{3}{4}$, & $\frac{7}{9}$ maiores $\frac{7}{12}$. Cæterum nonnunquam fractionem ad suum integrum cõparamus, quæ eo quandoq; maior est, quandoq; minor, eiq; nõ raro æqualis. Maior quidem est, quoties numerator maior deprehenditur denominatore: vt $\frac{5}{4}$ integrũ superãt, ita & $\frac{9}{7}$. Dum autem numerator æqualis denominatori cõperitur, fractio ea æqualis est integro: nam $\frac{5}{5}$ vel $\frac{6}{6}$ integrum reddunt, componuntq; adamussim. At integro ea fractio simplex, minor est dicenda, cuius numerator est denominatore minor: nemo enim non iudicauerit $\frac{3}{5}$ vel $\frac{4}{7}$ longè minores esse integro cuius sunt fractiones. Continuæ cuiuspiam quãtitatis magnitudinẽ exprimentes, hac semper (si qua vtendum sit fractione) vtimur, & non maiore: nunquam siquidem ex vsu dicemus corpus aliquod esse 4 pedum & $\frac{7}{4}$, sed verius id esse dicemus 5 pedum & $\frac{3}{4}$. Maiorem itaq; fractionem solum inter multiplicãdum aut diuidendum efficimus: quæ tamẽ mox vt suborta fuerit in suum integrũ vertetur.

Fractionum prorsus diuersarum cõparatio.

¶ Alterum documentum, comparandæ fractiones si & numeratore & denominatore differant, alteram cõueniet in alterius denominatorẽ vertere, per secundum documentum huius: & quæ harũ maior cognita fuerit ex præmisso documento, eãdem & maiorem ante reductionem fuisse est proclamandum. Exemplis agendum est. Lubet videre quæ harũ fractionum $\frac{5}{15}$ & $\frac{3}{9}$ maior sit, reducẽs priorem ad posterioris denominationẽ, duco 5 in 9, & orta 45 per 15 priorem denominatorẽ distribuo, fiuntq; in quotiente $\frac{3}{9}$: quæ quum æquales sint posteriori fractioni, dico $\frac{5}{15}$ & $\frac{3}{9}$ æquipollere. Ad hæc, si offerãtur $\frac{8}{13}$ & $\frac{6}{10}$, ducens 8 in 10 procreo 80, quibus per 13 denominatorem priorẽ diuisis, 6 in quotiente reperiuntur supersuntq; 2 indiuisa: concludo itaq; $\frac{8}{13}$ continere $\frac{6}{10}$ & $\frac{2}{13}$ $\frac{1}{10}$, proinde priorem fractionẽ maiorem esse posteriore. Similibus exẽplis tete velim exerceas quò crebriori vsu operationis ratio tibi perspecta sit in cunctis.

Fractio fractionis, vt ad alias comparetur.

¶ Tertium documentum, quum fractio fractionis ad simplicẽ fractionem aut alterã fractionem fractionis cõparatur, decet omnẽ fractionẽ fractionis in simplicẽ fractionem prius cõuertere arte tradita, mox simpliciũ subortarum maior ex præcedenti documento elicietur. Vt dum comparamus $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ ad $\frac{3}{5}$, quum illa fractio fractionis ad $\frac{14}{27}$ reducatur, hæc autem simplex in posteriorem versa solum $\frac{3}{5}$ & $\frac{16}{27}$ $\frac{1}{5}$ conficiat, merito illa fractio fractionis minor erit simplici fractione. Ad hunc modum (si operationem integrè & in vnguem absolueris) deprehẽdes $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ maiores esse $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{5}$: quum simplicium fractionũ ad quas illæ reducuntur $\frac{14}{27}$ maiores sint $\frac{12}{35}$. De his autem, quæ (etsi Arithme-

tica sint plúsque satis vulgata) præmisisse oportebat, hactenus sit dictum. cætera deinceps prosequamur.

¶Data quantitate, quo pacto alteram præbeamus aut ea maiorem aut minorem, quæ statutam quãuis proportionem tum maioris tum minoris inæqualitatis seruet ad eam. Cap. V.

HVc iam pertinet quauis quantitate signata (vt ternario) alteram cõstituere, quæ datã proportionem (ceu sesqualterã) respectu illius obseruet. Quod vt magis peruium fiat, scire licet in primis quum quantitas species duas comprehẽdat, numerum & magnitudinem, hanc cuiusq; denominationis partes habere. Est enim (vt cum Aristotele dicã) omnis magnitudo infinita diuisione ademptionéq; rationalium partium: & in quotvis æquas magnitudines diuisibilis. Numerus autem etsi appositione infinitus sit, sempérq; numero fieri possit additio, nequaquam tamẽ in quotvis partes diuisibilis est: ceu ternarius ostendit, qui nec medietatem nec quartã aut quintam partem suscipit, quatenus simplex numerus est. Nonnulli siquidem duplicem numerum statuentes, alterum rerum diuisibilium, vt est ternarius pedalium corporum: alterum indiuisibilium, velut est ternarius angelorum, illũ affirmãt cuiusq; denominationis partes habere eiúsq; medietatem esse pedaneum cum semisse: hunc vero minime. At ij prorsus à vera tum mathematica tum logica ratione exorbitant: quãdoquidem impar omnis numerus medietatem respuit. Si igitur ternarius pedaneorum medietatem habet, id minime erit qua ratione numerus est ternarius, sed qua ea quorum est numerus sunt cõtinua diuisibilia in semper diuisibilia. Proinde quod in præsens tractandũ suscepimus nequaquam generatim fieri potest in numeris, quatenus numeri sunt: verum in magnitudinibus idampliter tradetur, ob partium suarum diuersitatem, quas fractiones, fractionúmq; fractiones appellant. Sunto tamen hęc documẽta de numeris simplicibus, qui quatenus tales sunt considerãtur: quósq; numeros rerũ indiuisibilium vulgo vocãt. ¶Primum documentum, Omnis numerus simplex quãlibet multiplicitatis speciem admittit, eum duplando, triplando, aut quadruplando. At nõ omnem superparticularem aut superpartientem quisquam numerus habet: sed eum solum cuius in se denominatorem vel denominatores comprehẽdit. Prior pars ex se plus satis patẽs est, q; & binarius & ternarius & quiuis alius numerus duplari, triplari, quadruplari{q;} possit. Parte autẽ posteriore innuere volumus quaternarium numerum habere sesqualterum supra se, q; scilicet sesqualter à medietate denominetur, hæc{q;} sit in 4. Habet demum & sesquiquartum, qui à quarta parte (quam 4 habet) appellatur: habet tandem supertripartientem quartas, qui à tribus quartis nomẽ sortitur, nam $\frac{3}{4}$ in 4 sunt: nullum autẽ numerũ non multiplicẽ præter hos suscipit. Rursum 7 sesquiseptimum habet maiorem se: superbipartientem septimas, supertripartiẽtem septimas, superquadripartientẽ septimas, superquintupartientẽ septimas, & supersextupartientem septimas. Hos autẽ numeros maiores deprehendere licet, si minori ea pars aut eæ partes adijciantur quæ maiorem denominant. Vt quum respectu 9 reperiendus

Quãtitatum diuisio.

Quam proportionem maiorẽ quiuis numerus habeat, inuenire.

est numerus superbipartiensftertias,id est,qui ad 9 proportionē habet superbipartientem tertias,nouenario duos ternarios qui eius sunt ⅔ adijciēs,reddo 15 quæsitum numerum. Hinc nullo negocio colligere potes omnem numerū qui sesqualterum habet,omnē multiplicem sesqualterum recipere:& cui adest superbipartiēstertias,aderit & omnis multiplex superbipartiēstertias:quum, vt nuper est dictum,omnis numerus omnem multiplicem supra se patiatur. Quo pacto hos reperias,non arbitror te latere:quādoquidem parte quæ reperiendum numerum denominat minori adiecta,maior prodit efficiturque. Suscipit itaq; quinarius numerum triplum superbipartientem quintas:quem statim assequeris si quinarium triples,ortisq; 15 duas quintas quinarij,hoc est 2 adieceris:fiunt autem 17. ℂ Secundum documentū,nullus numerus omnē submultiplicem,subsuperparticularē,vel omnem subsuperpartientē patitur. Sed is solum submultiplicem habet,cui pars inest aliquota cōmunem habēs denominationem cum illo submultiplici:ea autem pars est numerus qui inuestigatur. Quinarium itaq; nec subduplum nec subtriplum,sed solum subquincuplum continere dixeris:senarium vero & subduplum & subtriplum, qui sunt 3 & 2,partes eius aliquotæ. Porrò is numerus subsuperparticularem habet qui in partes aliquotas plures vna diuiditur,q̄ sint eæ à quibus subsuperparticularis denominationem suscipit;cōstabit autem is subsuperparticularis numerus,vna earū partium aliquotarum à proposito numero dempta. Hoc præcepto statim cēsebis 12 subsesquitertium numerum admittere:quòd subsesquitertius à ternario vel tertia parte dicatur,& 12 in 4 partes aliquotas (quæ sunt 4 ternarij)secetur. Ab eo demum vt vnā quartarum(quæ est 3)subduxeris,nouenarius apparebit subsesquitertius numerus,qui pridem inuestigabatur. Ad hunc modum 25 subsesquiquartum habet,diuiditur siquidem in 5 partes æquas:quarū vna deducta,20 manet subsesquiquartus numerus. Ad hæc,is numerus subsuperpartientē cōprehendit qui in tot partes æquas est diuisibilis,quotus est numerus ex duplici denominatore subsuperpartiētis confectus. Reperietur autem quęsitus subsuperpartiēs,si tot earum partiū à maiori proposito numero demātur,quotus est prior denominator. Dixeris proinde 10 subsuperbipartientē tertias cōtinere:hic nanq; à 2 & 3 nominatur, qui iuncti 5 componunt,estq; 10 in quinq; partes æquas(nam in 5 binarios) diuisibilis. Quęsitum tandem numerum 6 esse deprehendes,qui duobus binarijs à 10 subductis,superest. Item 21,habebit numerū subsuperbipartiētem quintas:nam secari potest in 7 partes æquas,quæ erunt 7 ternarij:ab eòque duob⁹ ternarijs deductis,18 relinquetur ꝓpositus numerus. de his hactenus. Iam tempus est vt hęc in quantitatibus continuis aggrediamur. ℂ Tertium documētum sequentium basis,omnis numerus rerum diuisibilium potest in quotuis partes æquas distribui,idq; statim fiet numero prius in partes aliquotas diuisoris denominationem habentes,resoluto:mox illarum partium aliquotarum tot desumptis pro quotiente,quotus erat prior numerus diuidendus. Verbi gratia,debēt distribui 5 pedes in tres partes æquas:quum numerus diuidendus sit 5,& diuisor 3,resoluētur 5 pedes in suas tertias.& 5 tertiæ pro qualibet parte sumēdæ sunt,quotus est 5 numerus diuidendus. Sic 5

Quam proportionem minorē quiuis numerus habeat.

Continui in quotvis partes æquas diuisio.

pedibus in 3 partes diuisis,quælibet partium $\frac{5}{3}$ cōplectetur.Ita septupedali corpore in 4 partes æquas distincto,partium quæq; $\frac{7}{4}$ pedanei continebit:& quinario in 7 partes distributo,partium quælibet $\frac{5}{7}$ complectetur.Quód si forsan numerus ille rerum diuisibilium diuidendus & integra & fractiones habeat,integra in fractiones statim cōuertentur,siue astronomicæ siue vulgares fuerint:fractiones autem confectæ exposita arte diuidentur. Id exemplo clarius reddetur,animo est diuidere 3 pedalia cum $\frac{1}{5}$ in 4 partes æquas,resoluentur in primis 3 pedalia in $\frac{15}{5}$ quibus adiecta $\frac{1}{5}$,$\frac{16}{5}$ fiunt:has $\frac{16}{5}$ per 4 distribuens,$\frac{4}{5}$ in quotiente cōperio.Quare si 3 pedalia cum $\frac{1}{5}$ in 4 partes diuidantur,quęlibet pars $\frac{4}{5}$ erit.Sumatur exēplum difficilius,lubet 4 pedalia & $\frac{2}{3}$ per 5 diuidere,resoluantur 4 pedalia in $\frac{12}{3}$,quibus additis $\frac{2}{3}$,$\frac{14}{3}$ procreantur.has demum tertias volens integrè per 5 diuidere,resoluo in $\frac{70}{15}$, quæ sunt quintæ tertiarum,vel(vt manifestius dicā)quarum quęlibet est $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$:mox pro qualibet parte diuisoris capio in quotiente $\frac{14}{3}$ $\frac{1}{5}$.has demum quintas in simplicem fractionem resoluens,$\frac{14}{15}$ efficio:cōcludo itaq; q si 4 pedalia cum $\frac{2}{3}$ in 5 partes distingantur,quælibet partium erit $\frac{14}{15}$ vnius pedalis.In geometricis aut astronomicis fractionibus nihil magis est negocij,quare earum exempla in præsens omittimus. ¶Quartum documentum,vt respectu cuiusq; numeri rerum diuisibilium,cuiuscunq; proportionis detur quātitas maior,oblatæ proportionis primi termini inueniantur,ex documentis tertio capite traditis,móxque primo oblatus numerus per minorem terminū illius proportionis diuidatur ex præmisso documento.Sumatur demum quantitas sic se habens ad quotiētem,sicut maior terminus oblatæ proportionis ad minorem.Vt si iubeamur quantitatem præfigere,quæ proportionem habeat superbipartientētertias ad 4 pedes,quum primi termini inter quos illa visitur proportio,sint 5 & 3:per minorem illorum,qui ternarius est,diuidens 4 pedes,in quotiente reperio $\frac{4}{3}$. Diuiduntur itaq; 4 pedes in tres partes,quarum quælibet est $\frac{4}{3}$, nunc autem quantitas,quæ quinq; ex his partibus cōtinebit,est quā quęrimus.Ea igitur erit $\frac{20}{3}$,siue 6 pedum cum $\frac{2}{3}$, quare concludo 6 pedes cum $\frac{2}{3}$ ad 4 pedes proportionem habere superbipartientemtertias,quam priusvenabamur.Eodem prorsus modo si quātitatem inuestigemus,quę proportionem habeat sesquitertiam ad quadrupedaneū corpus,illa erit 5 pedum cum $\frac{1}{3}$. ¶Quintum documentum,numerus minor oblatam proportionē minoris inæqualitatis ad quemuis propositum maiorē reseruans,reperietur primis terminis eiusmodi proportionis,vt antè,statutis:mox siquidem proposito numero per maiorem terminum proportionis secto,minor innotescet qui ea se habeat proportione ad partes maioris,qua minor terminus datæ proportionis ad maiorē.Velut si reperiēdus est numerus subsesquitertius ad binarium,quum primi termini illius proportionis sint 3 & 4.secabo 2 per 4 seu in partes 4 æquas:fietq; quęlibet earum $\frac{2}{4}$ seu $\frac{1}{2}$.Constat tunc $\frac{3}{2}$ sic se habere ad $\frac{4}{2}$ sicut 3 ad 4:dico itaque vnius pedis cum $\frac{1}{2}$ ad 2 pedes,esse subsesquitertiā quæsitam proportionē.Ita dignosces respectu 7 pedum,4 pedes cum $\frac{1}{5}$ proportionē obtinere subsuperbipartientemtertias,qualis est 3 ad 5:diuiduntur quippè 7 pedes in 5 partes æquas,quarum quęlibet est $\frac{7}{5}$,& tres earum,quę $\frac{21}{5}$ seu 4 pedes cum $\frac{1}{5}$ efficiūt,

Dato continuo,proportioné quącq; maioris inæqualitatis ad id præfigere.

Ad datum continuum cuiusq; proportiōis minus signare.

sunt 16 qui quærebatur numerus. Exemplis altioribus & obscurioribus sese quiuis potest exercere.

Altera operatio.

¶ Postremis his duobus documētis deprehendere potes modum quo in simplicib9 numeris, quod hoc capite propositū est, aliter quàm duobus primis documētis tradidimus, excerpas. Modus autem est vt semper datæ proportionis primos terminos constituas ex tertio capite, conferes subinde simplicem numerum ad alterum extremorum prout res exigit, perpendens possit'ne is simplex numerus in tot partes aliquotas secari quot vnitates in eo extremo sunt cui cōparatur. Vbi enim id contigerit, reperibilis est numerus quem exposcis: sin minus, prorsus irreperibilis est. Velut quum dari debet numerus supertripartiēsquintas ad 25, video an is numerus possit in 5 partes æquas distribui, vt 5 huius proportionis minus extremum (sunt enim 5 & 8 duo eius primi termini). Quod vt ita nouero, 25 adijciā tres eius quintas, vt 40 excrescat, eam habens proportionē ad oblatū 25 quam 8 ad 5: in huncq; modum adimplebitur optatum. In proportione minoris inæqualitatis, iubeor signare numerum subsupertripartientemquartas ad 19: primi termini illius proportionis sunt 7 & 4: video proinde possit'ne 19 in septē partes æquas, vt septenarius distribui, id autem quum fieri nequeat, pronuncio quæsitum numerū haud quaquam signari posse. Ar respectu 21 dabitur ille numerus subsupertripartiensquartas: quandoquidem 21 diuiduntur in 7 ternarios, qui sunt partes aliquotę: sumptis itaq; 4 ternarijs, 12 efficitur quęsitus numerus. Censueris hac arte numerum dari subtriplum superquadripartientemquintas (intelligo dictionem sub in totum ferri) ad 57. Nam quum primi termini proportionis illius sint 19 & 5, possintq; 57 in 19 ternarios diuidi, ex his 5 colligens, 15 reddes quæsitum numerum. Hoc vteris modo si quando alter prolixus videbitur: at (etsi neuter demōstratione careat) prior est intelligibilior, manifestā præ se ferens demonstrationis rationē.

Operatio per regulam de tribus numeris.

¶ Res omnis præsenti hoc capite suscepta, etsi abunde discussa sit, non incōmodè nihilominus omnes operationes demonstrationis via traditas, in vnicā concludemus: quò quisque operandi labore leuetur. Cuiusuis ergo quantitatis denominatione præstituta, vt ad eam extremum cuiuspiā proportionis aut maioris aut minoris inæqualitatis cōperiatur, præfiniēdi sunt primi termini illius proportionis: dataq; quātitas primo ordine cōstituetur, secūdo ordine extremū maius proportionis, si ea maioris sit inæqualitatis, aut minus, si minoris: ductóque primo numero in secundum, si quod oritur per tertium secetur, quęsita quātitas mox exiliet. Velut dum ad bipedaneum cum $\frac{2}{5}$ quęritur quantitas proportionem habens superbipartientemtertias, bipedaneum principio in $\frac{10}{5}$ resoluendum est, quibus $\frac{2}{5}$ adiectæ $\frac{12}{5}$ reddunt: has idcirco primo loco cōstituā, 5 loco secundo, & 3 tertio, in hunc modum, $\frac{12}{5}$ 5 3: ductisq; 12 in 5 fiunt $\frac{60}{5}$ quæ per 3 diuisæ $\frac{20}{5}$ seu quatuor integra cōponunt: hæc ergo ad duo integra cum $\frac{2}{5}$ proportionem habent superbipartientemtertias. At si ad eundem, subsuperbipartientemtertias quęsieris, 3 secundo loco reponendus est, & 5 tertio: absolutaq; operatione Arithmetica arte $\frac{36}{25}$ apparebūt. Hic vsus est regulæ quæ de tribus numeris appellatur, qua tribus numeris aptè locatis, quartus inuenitur ex multiplicatione primi per secundum & diuisione orti per tertium con-

fectus:idq́ licet fractiones plurimæ assistant. Vt quum lubet nouisse quantitatem, quæ ad $\frac{10}{7}$ se habeat, vt $\frac{15}{8}$ ad $\frac{7}{4}$: ducta prima per secūdam (quod numeratorū inter se, & denominatorū inter se multiplicatione perficitur) $\frac{150}{56}$ assurgunt: hæ per $\frac{7}{4}$ diuisæ (diuidūtur enim vnius numeratore in alterius denominatorem ducto, & cōtrà) $\frac{600}{392}$ ostendunt, quæ abbreuiatæ $\frac{75}{49}$ æquipollent: talis igitur est quęsita quātitas. Rursum si quantitas optetur ita se habens ad $\frac{9}{7}$, vt $\frac{5}{1}$ (sic quidem exprimenda sunt quinque integra) ad $\frac{7}{4}$: ea proculdubio erit $\frac{180}{49}$. Hic forsan modus plerisq́ gratus erit, quòd nūquam (velut in alijs) fractionum fractiones occurrant, ob assiduam multiplicationem: at minime refert quem delegeris, modo operationis ratio perspecta sit.

¶ Datis quibuscunq́ duabus rationalibus quantitatibus, quæ inter eas sit proportio enunciare docemur. Cap. VI.

Tertiam difficultatē superest discutiamus, qua proportionem quarumuis rationalium quantitatum succinctius reserare sumus polliciti. Id autem prius quàm documentis agatur, opportunum existimarim doctrinam habere qua statim cōmensurabiles omnes quantitates agnoscerentur: hoc enim haud quaquam potest ex tradita cōmensurabilium quātitatum definitione colligi. Verū quum præsens hic locus vix amplam patiatur rei huius decisionē, perbreue pręceptum adijciam, eius tamen demonstrationem in caput 8 reseruans. Omnes duæ quantitates numeris, aut numerorum fractionibus explicabiles, inter se commensurabiles sunt: estq́ earum rationalis proportio. De his ergo, si simplicibus numeris explicentur, ipsorúmq́ numerorum rationem habeant, in primis est dicendum: post hæc, integris seu integrorum numeris varias fractiones adijciemus, quibus, quod propositū est, complemētum attigisse videbitur. ¶ Primū documentum. Quò simplicium & inæqualium numerorum proportio innotescat, principio conuenit maiorem per minorem diuisisse, quem si æqualiter nullóq́ facto residuo secuerit, proportio est multiplex, cuius denominationē quotiens numerus significat. At dum aliquid superest indiuisum, generatim (specialius enim, sed inexpeditius potest præceptum haberi) diuisor secunda diuisione per residuum secabitur: si rursum quippiā manet insectum, per id, secundum diuisorem tertia diuisione secuisse oportebit: ex qua si & aliud indiuisum est, id diuisorem tertium quarta diuisione partietur. Ita ergo procedere conueniet quoad in exactam quandam diuisionem ventum fuerit: nam tandem deuenietur. Vltimæ autem diuisionis si diuisor vnitas comperta sit, dati primo numeri sunt primi suę proportionis: at si diuisor quispiā numerus fuerit, per eū (est enim is maxima pars aliquota, seu maxima dimēsio datorū numerorum, per secūdam septimi elementorum Euclidis) vtrunq́ datorum secabis: eruntque quotientes numeri primi illius proportionis. Tota ergo vis operationis est hos primos numeros reperire: quorū proportionem vt acceperis, eandem esse & principio datorum, indubitatò affirmes. Primorum autē quorūcunq́ numerorū proportio statim innotescit, solum nempè perpendendus est excessus maioris supra minorē. Aut igitur maior minorē sola vnitate

Quæ quātitates cōmensurabiles.

Simplicium numerorū proportio disquiritur.

superat, tunc proportio est superparticularis ab illa vnitate specialiter nominata: aut pluribus vnitatibus minor á maiore vincitur, estq; proportio superpartiens quam omnes vnitates simul acceptæ in speciali nominabūt. Idem iudicium ferendum est de multiplici superparticulari aut multiplici superpartiente. Res digna est quæ exemplis exprimatur: signāda est proportio 306 ad 17, facta diuisione maioris per minorem fiunt in quotiente 18: dicendum itaq; 306 ad 17 proportionē esse decuplamoctuplam. Rursum, quænam proportio sit 176 ad 165 disquirendum est, diuido 176 per 165, supersunt 11 indiuisa: per hæc diuido priorem diuisorē 165, hácq; sectione quum nihil relictū sit, assero 11 partem esse maximam amborum. Per 11 ergo diuidendi sunt duo dati numeri 176, & 165: quoties numerus prioris est 16, posterioris vero est 15: quúmq; horū proportio sit sesquidecimaquinta, talis erit & 176 ad 165. Lubet, vt cūcta dilucidiora sint, declarare proportionē 494 ad 133: diuiso maiore per minorē, 95 supersunt, per quæ secūdo partior 133, & 38 relinquūtur: per hæc tertio partior 95, manēntq; 19: per quæ tandem diuisis 38, nihil relinquitur indiuisum. Hæc ergo pars erit maxima ambobus cōmunis: per quam si datos numeros secuero, numeri quotientes conspicientur 26 & 7: quos quum certò sciam primos esse terminos suæ proportionis, facile fuerit eorum nouisse proportionē quæ est triplasuperquincupartiēsseptimas, qualis est & datorum numerorū. Minimo farè negocio noueris operationē ex hac olim tradita regula demonstrari: qualis est proportio duorum numerorum talis est quorūcunq; qui ad eos proportionem quampiam habent, siue multiplicem siue superparticularē aut aliam tum maioris tum minoris inæqualitatis. Deinceps de fractis numeris est agendum. ¶ Secundum documentum, numeri rerum diuisibilium eiusdem denominationis eam inter se habent proportionē quam numeri simplices seu rerum indiuisibilium. Nam 8 pedalium ad 5 pedalia proportio dicenda est supertripartiensquintas, sic & 5 palmorum ad tres palmos superbipartienstertias. Quòd si inter numeros quātitatū diuersarū denominationū, sed commensurabilium (quales sunt astronomicæ fractiones inter se, aut geometricæ) reperienda sit proportio, debet in consimiles fractiones aut geometricas aut astronomicas resolui, quarū subinde pportio ex primo documēto nota fiet. Vt si nosse velim quæ proportio sit inter 5 passus, & 4 palmos, multiplicans 5 passus per 5, pedes 25 conficio. Hos rursus pedes per 4 ducēs, centum palmos procreo. Quum itaq; 100 palmorum ad 4 palmos proportio sit vigecupla quincupla, qualis 25 ad 1, eadem erit & 5 passuum ad 4 palmos. Eo iure duorū graduū ad 15 minuta, proportio est octupla: duo quippè gradus in 120 minuta resoluūtur, quæ 15 minuta octies comprehēdunt. Ex quo satis euidēs est, duorum passuum ad 5 gradus nullam posse designari proportionem, quum nec omnes gradus sint æquales, nec quantitates illæ se numerent.

*Magnitudinum pportio, est vt suarum denominationū.*

¶ Tertium documentum, si plures quantitates diuersarum denominationū cōtingat ad aliquā vnam aut plures diuersarum etiā denominationū comparari, debet vtrunq; cōparationis extremum ad suā minorem denominationē reduci: quúmq; cuiuslibet extremorū vnica fuerit denominatio, illæ rursus si diuersæ sint in eādem cōuertentur. Sic ergo pröpte deprehēdetur extremorū

*Fractionum geometricarū aut astronomicarum proportio.*

proportio, vt si quęratur quam proportionem habeāt 4 passus & 3 palmi ad 3 pedes & 3 digitos: quum vnum extremorum sit 4 passus & 3 palmi, reducā 4 passus ad palmos 80. (multiplicatis quidem 4 per 5, & producto rursus per 4) hisq; 80 palmis iūgam 3, fietq; maius extremum 83 palmorū. Præterea alterius extremi multiplicans 3 per 4, & productū rursum ducēs in 4, 48 digitos cōpono: quibus adiectis 3 alijs digitis, minus extremum 51 digitorum prosiliet. Nunc quænam sit proportio 83 palmorum, ad 51 digitos ex præcedenti documento dignosces: hancq; reperies esse, sexcuplam superpartientem vigintisex quinquagesimasprimas. Hinc satis deprehendes quorumcunq; numerorū proportionē, si res diuisibiles cōmēsurabiles nulla vulgari fractione donatas metiatur. Nunc autē eorundem proportiones si vulgares fractiones admittāt, veniunt exponendæ. ¶ Quartum documentū, fractionum eiusdem integri (per idem & similia & æqualia cōprehendo) numeratores si æquales fuerint & denominatores inæquales, earū proportio ex denominatorū proportione discutietur. Quúmq; denominatores æquales sunt & numeratores inæquales, fractiones numeratorū proportionem obseruant. Ex priori parte eliciendum est $\frac{1}{5}$ ad $\frac{1}{7}$ proportionem esse superbipartientem quintas: & $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$ sesqualteram esse. Diuiso siquidem corpore in 3 tertias, medietas totius $\frac{1}{3}$ & medietatem vnius tertiæ comprehendit: quod in cæteris demōstrationis loco haberi potest. Vnum occurrit hoc loco minimè prætereūdum, eam fractionē maiorē esse cuius denominator est minor: & eam minorē cuius denominator est maior: medietas nempè maior est tertia parte, & tertia pars maior quinta. Proinde quæ proportio fuerit maioris denominatoris (qui est in fractione minore) ad minorē, eadem erit totius fractionis maioris ad minorē. Ad eūdem modum $\frac{3}{5}$ ad $\frac{3}{8}$ proportio erit supertripartiens quintas: & $\frac{4}{7}$ ad $\frac{4}{9}$ superbipartiēs septimas. Gratia autē partis secundæ documenti $\frac{6}{8}$ ad $\frac{5}{8}$ proportio dicetur sesquiquinta: & $\frac{9}{10}$ ad $\frac{6}{10}$ sesqualtera erit, qualis inter numeratores conspicitur. Posteriorem hanc partem demonstrat 15 quinti elementorum Euclidis: nam vt 9 integra ad 6 integra, ita & $\frac{9}{10}$ ad $\frac{6}{10}$: sed illa proportionem habent suorum numeratorum, ergo & hęc. Prior pars ex conuersa primæ noni elementorum Iordani demonstrationem suscipit, adiuuāte 15 quinti Euclidis. ¶ Quintum documentum, quum fractiones pro extremis proportionis desumptæ, diuersos tum numeratores tum denominatores habent, quò earum proportio succrescat, numerator antecedentis in denominatorem consequentis ducēdus est: rursumq; numerator consequētis in antecedentis denominatorē: & quæ inter ortos numeros inuenietur, ea erit & propositarū fractionum proportio. Antecedens, id extremum dico quod ad alterum comparatur: id vero consequēs, ad quod fit comparatio. In exemplo itaq; si te perconter, quæ proportio sit $\frac{5}{7}$ ad $\frac{7}{10}$: statim duces 5 per 10, fientq; 50 pro altero extremorū. Mox 7 consequētis numeratorem in 7 antecedentis denominatorē multiplicās, 49 pro reliquo extremo cōficies. Quum igitur horum extremorum proportio sit sesquiquadragesimanona, eandem esse & oblatarum fractionum censendum est. Porrò, si $\frac{4}{8}$ ad $\frac{2}{6}$ comparētur, ducens 4 in 6, 24 in vnguē procreo: & ductis 2 per 8, 16 fiūt: inter 24 & 16 sesqualtera est proportio, eadē ergo erit & datarū fractionū.

Vulgarium fractionum proportio.

Diuersarum fractionum proportio.

Comperies autem ex secundo documēto capitis quarti $\frac{4}{8}$ maiores esse $\frac{2}{6}$:quod & facile sic dignosces:duæ siquidem sextæ tertia pars sunt integri,& $\frac{4}{8}$ medietas sunt eiusdem:inter medietatem & tertiam partem,proportionem esse sesqualteram,iampridem euidens est.Quò huiusce documēti demonstratio appareat,esto A B antecedens, & C D consequens.A sit numerator antecedentis, æqualis C numeratori consequentis:B denominator antecedentis,D denominator cōsequentis. Ex præcedenti documēto,vt A B ad C D,ita D ad B:suntq; 4 termini proportionales:si igitur ad A B primū sumatur E multiplex,itemq; G totuplex ad D tertium:rursum ad C D & B secundum & quartū sumantur æque multiplicia,F scilicet ad C D,& H ad B.Per sextam definitionem quinti, vt E multiplex primi ad F multiplex secundi,ita G multiplex tertij ad H multiplex quarti.Quum ergo in operatione ad primum & tertiū sumātur æquè multiplicia,item ad secundum & quartum æquè multiplicia,patet operationis demonstratio.

$\frac{A\ 1}{B\ 7}$ ad $\frac{C\ 1}{D\ 10}$

E $\frac{5}{7}$ F $\frac{7}{10}$

G 50 H 49

Multarum fractionum proportio.

¶Sextum documētum,quoties alterum extremorum aut vtrunq; diuersis fractionibus(dico diuersorum denominatorum & numeratorum)componitur,debent vtriusq; extremi fractiones diuersæ in vnicā conuerti,per tertium documentum quarti capitis:tuncq; reductarum proportio ex præcedenti discussa,erit priorum fractionum proportio. Velut si cōparentur $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{9}$ vnius pedalis ad $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{10}$ eiusdem,proportio inter illa extrema superbipartienstertias erit.Nam antecedente reducto,$\frac{27}{27}$ consurgunt pedale vnum integrè reddentes:consequēs autem reductum $\frac{30}{50}$ præbet seu $\frac{3}{5}$:modo cōspicuū est integri ad $\frac{3}{5}$,proportionem esse superbipartientemtertias.Porrò si comparētur $\frac{4}{7}$ & $\frac{2}{5}$ ad $\frac{4}{9}$ & $\frac{6}{11}$,quum extrema reducta fuerint ad simplices fractiones, apparebunt $\frac{34}{35}$ & $\frac{98}{99}$,in his proportio posterioris quæ maior est ad priorē minorem est sicut 3430 ad 3069:quam statim comperies ex primo huius documento esse superpartiētem sexaginta vnam ter millesimas sexagesimasnonas: ij enim termini primi sunt suæ proportionis.

Fractionum fractionum proportio.

¶ Septimum documētum,vbi extremorū alterum aut vtrūq; cōstat fractione fractionis vnica vel pluribus, vertenda est fractio fractionis in simplicem fractionem:simplicium subinde fractionū proportio ex antè dictis discutietur.Ad eundem ferè modum cōplebitur operatio si alterum aut vtrunq; extremum ex simplici fractione,& fractione fractionis componatur.Si ergo comparentur $\frac{1}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{7}$ ad $\frac{3}{7}\ \frac{3}{5}$,sic ducēdi sunt denominatores inter se,bis 2 sunt 4,& semel 4 semper 4,4 ergo fit numerator antecedentis:& ductu consimili denominatorū fit denominator cōmunis 105:estq; totum antecedens $\frac{4}{105}$.Demum cōsequentis numeratores inter se ducti reddunt 9 cōmunem numeratorem:& denominatores inter se si ducantur 35 conflabunt,quare totū consequens est $\frac{9}{35}$,quod liquet maius esse suo antecedente.Estq; proportio eius ad suum antecedēs,similis ei quæ inter 945 & 140 reperitur:est autem horum numerorum proportio sexcupla supertripartiensquartas,qualis est inter 27 & 4 primos terminos.Altera parte documenti,si comparentur $\frac{5}{8}$ & $\frac{6}{7}\ \frac{2}{3}$ ad $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{8}\ \frac{2}{5}$ eiusdem integri,reductionibus absolutis antecedens erit $\frac{201}{168}$,& consequens erit $\frac{190}{200}$:harum autem fractionum proportio,est vt proportio 40200 ad 31920 superpartiens sexagintanouem ducētesimas sexagesimassextas.primi quippe termini sunt 335 & 266.¶Octauum

documẽtum, quum alterum aut vtrunq; extremũ constabit ex integro vel integris, & fractione vel fractionibus eius simplicibus, & fractione vel fractionibus fractionũ, fractiones fractionum ad simplicem sunt reducendæ: & duæ simplices quæ tunc erũt ad denominationẽ eandem: & tãdem integrũ in cõsimiles resoluetur fractiones. hocq; in vtroq; extremorũ facto simpliciũ fractionũ subortarum proportio nota fiet ex documento quinto. Velut si comparẽtur 2 pedalia & $\frac{4}{7}$ cum $\frac{3}{4}\ \frac{2}{5}$ ad 3 pedes & $\frac{2}{5}$ cum $\frac{4}{9}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{7}$, resoluuntur in primis fractiones fractionum antecedentis in $\frac{6}{20}$: & duæ simplices quæ tunc reperiuntur in $\frac{122}{140}$, rursum 2 pedalia in hanc denominationẽ resoluta $\frac{280}{140}$ efficiunt, quę aliis prioribus adiectæ $\frac{402}{140}$ componunt simplicem fractionẽ antecedentis. Consequẽtis fractiones fractionum in $\frac{24}{315}$ conuertũtur: rursus simplices fractiones quæ tũc apparẽt in $\frac{750}{1575}$ resoluũtur: tres subinde pedes in $\frac{4725}{1575}$, quæ prioribus iunctę $\frac{5475}{1575}$ componunt, totum quidem consequens maius est (vt suo loco patet) suo antecedente. Proportio autem inter $\frac{5475}{1575}$ & $\frac{402}{140}$ est sicut 766500 ad 633150, quæ est superpartiens bis mille sexcentas sexagintaseptem duodecies millesimas sexcentesimas sexagesimas tertias: primi nanque termini eorum sunt 15330 & 12663, qui post decẽ diuisiones dignoscũtur. ¶ His documẽtis plus satis (ni fallor) euidens est nullas posse quantitates præfiniri, etiam quotcunq; fractionibus obruantur, quin earũ obtineatur proportio: etsi innumerę possint earum fieri mixtiones. Exemplis te exercuimus obscuris: quæ etsi non ita frequenter in vsum veniant, his tamen & ad obscuriora (si quando contingant) & ad leuiora promptior efficieris. Tres iampridem propositas difficultates satis discussisse videbor, si quod de fractionum abbreuiatione capite quarto propositum est, hic adiiciam. Est autem abbreuiatio fractionis resolutio in minorem eiusdem valoris: ob id facta, vt quãta sit maior expeditius cognoscatur. Promptius siquidem quis concipiet quanta pars integri sint $\frac{2}{3}$, quàm $\frac{18}{27}$, & si eandẽ prorsus significẽt: id igitur documẽto est declarãdum. ¶ Nonum documentũ, quum numerator & denominator cuiusquã fractionis inæquales sunt, debet maior (queãdmodum primo huius documẽto monebamus) per minorẽ diuidi: & residuum, si quod est, minorẽ secunda diuisione partietur: cuius residuum, secundum diuisorem diuidet tertia diuisione, hicq; diuisionis ordo seruabitur dum aliqua cõperta fuerit nullũ admittens residuũ. Tunc nempè per vltimũ diuisorẽ conueniet & numeratorẽ, & denominatorẽ diuidere: quotiẽtésq; numeri minimã fractionẽ eiusdem valoris cum priore cõstituent. Velut si noscere lubet quid nobis significent $\frac{104}{143}$, distribuãtur 143 per 104, & per residuũ quod est 39, 104 diuidentur: 26 tunc supererunt, per quæ 39 secari debẽt: hac sectione 13 manent, quæ 26 æqualiter diuidunt. Ob id igitur & numerator & denominator sunt per 13 diuidendi, apparéntque quotientes 11 & 8: quare dicendum datam fractionem $\frac{8}{11}$ æquipollere. Aequipollebunt rursus $\frac{195}{105}$, $\frac{13}{7}$: & $\frac{76}{133}$, $\frac{4}{7}$: quod proposita arte disquirere potes.

Variè commixtarum fractionum proportio.

Fractionum abbreuiatio.

## ¶ De partitione cuiusque magnitudinis in partes proportionales, omni proportionum genere. Cap. VII.

NOn corporum modo temporúmve,ſed & rerum plurimarum diuiſiones,vt perſpectas paſſim philoſophi præmittunt,dum de motibus agentiúmq; naturalium actionibus altius diſſerunt.Proinde non incõmode hoc loco quod de hiſce diuiſionibus ſuffecerit,adiectũ videbitur.Corpus autem nullum exiſtimandum eſt in omnes ſuas partes proportionales poſſe actu diſtingui:infinitæ ſiquidem ſunt potentia,aſſiduáque diuiſione nequaquam poſſumus vltimam pertingere,ſed nec ad indiuiſibile quoddam peruenietur.Verum ſat fuerit aliquot partes præfinire certa proportione donatas,vt earum habitudine nota,cæteras ſaltẽ intelligamus qua ſint proportione.Quum nẽpe corpus in partes proportionales proportione dupla diſtinguendum eſt,id ſolum efficere conamur,vt prima pars dupla ſit ſecũdæ,& ſecũda dupla tertiæ,& tertia quartæ,ita & in reliquis.Proportione omni maioris inæqualitatis poteſt corpus quantulumcunq; fuerit diſtribui: at proportione minoris inæqualitatis nihil ſecari poſſe ſinit naturalis philoſophia.Data nẽpe prima parte corporis quæ modicę ſit quantitatis,ſecundam neceſſum eſſet aliqua proportione ea maiorem eſſe,& tertiam eadem proportione maiorem ſecunda,rurſumq; quartã maiorem tertia,ad hunc q; modum corpus ipſum in infinitam magnitudinem attolleretur,quod fieri nequit.Ad hęc,ſi(vt mathematicus puncta & lineas in corporibus)ſupponamus quampiam magnitudinem in partes proportionales diſtinctam eſſe,etſi ea ipſa ad extremum partium minorum nulla parte terminetur,punctus tamen,linea, aut ſuperficies terminus erit,quem præcedunt partes innumeræ eo & quouis præcedenti puncto concluſæ.Id licet in infinito potẽtia fieri cernamus,in infinito tamen actu(vbi quoddam intelligamus)admittere eſt incommodum. Ad ea tãdem quæ inſtituimus pro more tradendum eſt documẽtum.¶Magnitudinem quãuis quoties lubet in partes aliqua proportione diſtinguere, primi termini proportionis illius ſtatuentur,ex capite tertio:totáq; magnitudo in tot partes ſecabitur quot vnitates habet numerus maior:mox ex his tot ſumantur pro reſiduo à prima parte proportionali quot vnitates ſuſcipit minor numerus.Rurſus hoc ipſum reſiduũ in ſimiles partes diſpeſcetur,quibus tota magnitudo:quarum tot complectetur reſiduum à duabus primis partibus proportionalibus,quot vnitates inſunt numero minori.Ad hunc modũ ſi aſſiduè proceſſeris,cõſpicies primæ partis ad ſecundam,ſecundæ ad tertiã, & cuiuſlibet ad proxime ſequentem,quæſitam proportionem obſeruari.Vbi igitur linea 5 pedum diſtinguenda ſit in partes,quarum continua ſit proportio ſuperbipartienſtertias,quum illius proportionis primi termini ſint 5 & 3, tota linea in 5 pedes ſecabitur,quorum tres fiẽt reſiduum à prima parte proportionali,ſicq; prima pars duorum pedum reddetur,ſeu $\frac{2}{5}$ totius.Præterea tres pedes in 5 partes ſeparabuntur,quarum quæuis erit $\frac{3}{5}$ pedis:& $\frac{9}{5}$ deſumẽtur pro reſiduo à ſecũda parte proportionali,quæ fiet $\frac{6}{5}$,ſeu vnius pedis cũ $\frac{1}{5}$. Rurſus $\frac{9}{5}$ in partes 5 diſtribuẽtur,quarũ duæ fient tertia pars proportionalis. Videre tunc licet primæ partis proportionalis ad ſecundam,eſſe optatã proportionem ſuperbipartientem tertias:duorum inquam pedum ſeu $\frac{10}{5}$ ad $\frac{6}{5}$.Id

Diuiſio in partes proportionales.

clariori exemplo fiet euidentius, quo dabitur corpus 64 pedum quadrupla proportione distribuēdum: in eo residuum à prima parte proportionali dico esse oportere vnam quartam totius, quæ est pedum 16: & residuum à secunda parte esse pedum 4, residuum à tertia vnius pedis, residuum à quarta vnius quartæ pedis. Partes autem si conspexeris, deprehendes primam 48 pedum, secundam 12, tertiam trium, quartā vero $\frac{3}{4}$ vnius pedis: inter quas quadruplā proportionem assiduò haberi conspicuum est. Hunc operandi modum nobis tradidit Euclides 19 quinti elementorum: Ita enim inquit, Si sicut totum ad totum, sic fuerit ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum erit sicut totum ad totum. Item & 11 septimi simile habet in numeris. Quum itaq; in exemplo totum corpus 64 pedum ad 16 pedes residuum à prima parte, proportionem habeat quadruplam, idq; residuum ad aliud residuum à primis duabus partibus, & hoc ad residuum à tribus primis eandem rationem seruent, ac velut tota statuamus: si à quouis suam quartam demamus, reliquorum inter se necessum proportionem quadruplam inueniri, quæ est totorum proportio. Si ergo aliquæ quantitates proportionales sint, qualis erit earum proportio, talis erit & excessuum, horū demōstrationibus quæ passim ex Euclide patent, nō patitur locus diutius insistere: hinc tamē iuuabit corollaria quædā deducere. ¶ Primum, modus alter diuidendi corporis, prima parte reperta hinc innotescet: si nempe residui à prima tantam partem desumpseris quanta erat prima respectu totius, secunda pars proportionalis exiliet: demum pars tertia, alterius residui tota erit, quota prima totius. Velut dū sumebatur corpus proportione quadrupla diuidendum, si noueris primam partem esse $\frac{3}{4}$ totius, secundam identidem $\frac{3}{4}$ residui à prima, & tertiam $\frac{3}{4}$ residui à duabus primis amplecti censendum est, & in reliquis pro ratione. Quo demū conspicuū est, eam proportionē quæ est totius ad primā partem, ei similem esse, quæ est primi residui ad secundam partem, & secundi residui ad partē tertiam. Huiusmodi autem proportio nunquam similis est proportioni quam habēt partes inter se, præter q̄ dum proportiōe dupla diuisio fit: in hac siquidem totius ad primam partē, totius ad residuum à prima, vt cuiusq; partis ad proximē sequentem, dupla dignoscitur proportio. ¶ Secundum corollarium, omnes partes proportionales impares si iunxisse contingat, eam proportionē ad pares omnes identidem iunctas habebūt, qua corpus diuiditur. Item quotlibet partium præcedentium simul acceptarum, ad totidem alias sequentes simul acceptas, erit proportio quæ est primæ præcedentium ad primā sequentium. Hæc posterior pars oritur ex 13 quinti & 13 septimi, versione Campani, qua plane innuitur diuiso corpore dupla proportione, 4 primas partes ad 4 subsequentes, sexdecuplam proportionē habere: ita & tres quasq; præcedentes ad alias tres subsequentes quadruplam. Prior etiam pars ex eodem loco demonstrationem habet: quum enim quælibet pars impar ad proximam parem, proportionem habeat diuisionis, omnes impares pariter acceptæ ad omnes pares pariter acceptas, eadem fueriut proportione. Id prompte deprehendetur si corpus 16 pedum, dupla sit proportione distinctum: nam prima pars sit 8 pedum, secunda 4, tertia duorum, & prima vnius pedis. Prima & tertia

Primum corollarium.

Secundum corollariū.

iunctę 10 pedes reddunt,ſecũda & quarta pedes 5,ad quos 10 dupla ſunt proportione. Ad hũc modum,ſi prima pars proportionalis 64 pedes habeat,ſecunda 32,tertia 16,quarta 8,quinta 4,ſexta duos, ſeptima vnũ, octaua dimidium;vt prima pars ad quartam proportionẽ octuplam retinet,ita trium primarum quæ pariter acceptæ 112 pedes reddunt,ad tres ſubſequentes,quæ 14 pedum ſunt,octupla percipietur proportio. Rurſus 4 priorũ ad 4 poſteriores ſexdecupla dignoſcetur,qualis primæ ad quintã:ſunt enim primæ 4,pedes 120,& 4 poſtremæ,pedes 7 cum $\frac{1}{2}$. ℭ Tertium corollariũ,quẽadmodum proportio primæ partis ad tertiã,eſt ſimilis ei quæ habetur ſecũdæ ad quartam,& tertię ad quintam,idq; per 16 quinti & 14 ſeptimi Euclidis:ita generatim qualis eſt proportio cuiuſuis partis ad quãuis ſequentẽ,talis eſt cuiuſuis alterius ad ſequentem ordine conſimili. Vt enim ſecunda ad octauã,ſic tertia ad nonam,& ſexta ad duodecimam:ꝗ quęuis minor ſuã maiorem ſexto loco ſequatur. Ad hæc,proportio cuiuſq; partis ad ſuã tertiam eſt proportio eius ad proximã duplicata:demũ proportio cuiuſquã partis ad quartã ſequentẽ, eſt proportio eius ad proximã triplicata:hæc ita volunt decima & vndecima definitiones quinti:de quibus amplior cognitio ex libro ſecundo ſperãda eſt. Plurima ab Euclide de proportionalibus quãtitatibus paſſim tradita,his nõ incongruè admiſceri poſſent:at quòd ſatius ſit quæq; ex proprijs authoribus haurire,iam rationalibus quantitatibus finem faciens,ad irrationalium proportiones tranſgrediar.

Tertium corollarium.

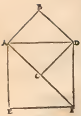
## ℭ De irrationalis proportionis ſpeciebus,déque eius à rationali diſcretione. Cap. VIII.

QVantitatum cõmenſurabilium(quæ vt numeri ſunt)proportionibus diffuſe traditis,incommenſurabilium quãtitatum proportionem iuuat exprimere. Eam autem,proportionem irrationalẽ diximus appellari. Cuius duo mẽbra ſunt, ſimplex irrationalis, & multiplex irrationalis. Simplicẽ irrationalem nuncupabimus,in qua maior quãtitas minorem ſemel & partem minori incommenſurabilem exactè ſuſcipit: eiuſmodi eſt proportio diametri ad coſtã eiuſdem quadrati. Exceſſus nempè quo diameter coſtam ſuperat,nec pars eſt nec partes minoris quãtitatis,dico coſtæ:quod nihilominus fieri nequit in numeris. Et ſi igitur omnis numerus minor maioris aut pars ſit aut partes,nequaquã tamen omnis quantitas minor maioris aut pars eſt aut partes. Multiplex irrationalis ea eſt proportio cuius maior quãtitas minorẽ pluries & aliquid illi incõmenſurabile cõprehẽdit Velut eſt proportio quæ eſt inter diametrũ bis ſumptam & coſtam eiuſdem quadrati:quantitas enim ex duabus diametris conſurgens,coſtam bis comprehendit & aliquid coſtæ incõmenſurabile. Vt nempè exceſſus diametri ſuper coſtam eſt coſtæ incõmenſurabilis,ita eius duplum,triplum,quadruplũ, ſeſqualterum,& quicquid proportionem maioris aut minoris inæqualitatis rationalem habet ad illud. Nam ſi duæ quantitates cõmenſurabiles ſint inter ſe,& vna fuerit alicui tertiæ incõmenſurabilis,oportet & reliquam eidem incommenſurabilem eſſe,per corollarium ad octauam decimi Euclidis. Huius

Irrationalis proportiõis diuiſio.

ſpeciei plurima mēbra licet deſignare ſecundum multiplicitatis diuiſionē:vt ſunt dupla irrationalis,& tripla irrationalis,quadrupla irrationalis. At prioris membri vix queūt ſpecies præfiniri,q̄ ijs nō habeamus impoſita nomina: ſed à rationalibus quodam pacto denominationē ſortiuntur. Dicuntur enim medietas duplæ,tertia pars duplæ,medietas ſeſqualteræ,tertia pars quadruplæ,aut alio quopiam nomine:quod ex ſecūdo libro aptius conijcere licebit. Rurſum vt datæ ſpecies ſub proportione maioris inæqualitatis cōſtituuntur, ita conuenit proportiones irrationales minoris inæqualitatis intelligere:ſi minorem quantitatē maiori incōmenſurabili cōtulerimus. Quò autē quibuſuis oblatis quantitatibus,dignoſcatur an eæ cōmenſurabiles ſint an incōmenſurabiles,ſit hoc vnum documentum. ❡Omnes duæ quantitates numeris aut numerorum fractionibus explicabiles,ſunt cōmenſurabiles inter ſe,eſtq; inter eas rationalis proportio. Quòd ſi oblatæ quantitates nec numeris nec eorum fractionibus exprimantur,ſtatim expediet minorem à maiore donec minor ea ſuperſit,ſubducere:per vndecimam ſexti:(id autem nihil aliud eſt q̄ maiorem per minorem diuidere)Demum à minori reſiduum dematur, ab hocq; primo reſiduo,ſecundum reſiduū,donec minus eo ſuperſit:& ab hoc ſecūdo, tertium ſubtrahatur. In hunc ergo modum ſi continua ſit ſubductio,nec ad æqualia quandoq; deducamur,quantitates eæ incōmenſurabiles ſunt:ſi vero ad æqualia veniatur,commenſurabiles erunt,vt capite ſexto traditum eſt:hic noſcēdi modus ab Euclide 2 decimi,& prima ſeptimi traditus eſt. Conuenit in primis priorem documenti partem demonſtrare. ſi quantitates ſignatæ integris & eiuſdem denominationis conſtent numeris,nemo negauerit eas commenſurabiles eſſe:quum 100 & 8 pedes cōmunicent. Ad hunc modum nec ſi integra fractiones habeant denominationis eiuſdem:cōmunicabunt enim in ea fractione,vt 4 pedes cum $\frac{3}{5}$ & 7 pedes cum $\frac{4}{5}$,habēt $\frac{1}{5}$ pedis partem aliquotam cōmunem. Si vero fractiones diuerſarum ſint denominationum,vtraque quantitate ad ſuam minorem fractionem reducta,licet inde prouenientes fractiones diuerſarum ſint denominationū,ſunt tamen cōmenſurabiles. Omnis ſiquidem fractio alicuius integri,cuilibet fractioni etiam alterius denominationis eiuſdem integri cōmenſurabilis eſt,vt capite ſexto eſt demonſtratum: quare quotcunq; fractiones vnius denominationis, quotcunq; fractionibus vel alterius denominationis eiuſdē integri ſunt cōmēſurabiles. Quū igitur ad has reducta ſint integra & integrorū fractiones,cōſequens eſt quantitates ex integris & integrorū fractionibus cōpoſitas cōmenſurabiles eſſe,ac rationali proportione donari,hāc autem capite 6 docebamus reperire. Hinc dices vnū pedaneum cum $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{5}$,cōmenſurabile eſſe 2 pedaneis cum $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{7}$:quod & breuius demonſtrari poteſt. Nam $\frac{1}{7}$ quæ pars eſt aliquota quantitatis ſecundæ, cōmenſurabilis eſt $\frac{1}{5}$ quæ eſt pars aliquota alterius:idq; pluries eſt oſtenſum: oportebit idcirco & ambas eas quantitates cōmenſurabiles eſſe:quod ſtatim patebit his propoſitionibus. Si aliquarum quantitatum partes aliquotæ commenſurabiles ſunt,illæ etiam quātitates inter ſe cōmenſurabiles erunt. altera. Si duarum quantitatum altera fuerit alterius parti aliquotæ cōmenſurabilis,

Quantitates cōmenſurabiles quo pacto noſcantur.




ipſas quoqꝫ oportet eſſe cõmenſurabiles. Sunt autẽ hæ ꝓpoſitiones corollaria ad octauam decimi Eucli. Documẽti pars altera vt dilucidior ſit, demõſtrandum videtur aliquas quantitates incõmenſurabiles eſſe, quod de diametro & coſta eiuſdem quadrati ſæpius eſt propoſitum. Conſtituatur itaqꝫ quadratũ A B C D, eiúſqꝫ diameter A D quadratum in duos triangulos reſoluens: eſto inſuper aliud quadratum A D E F ſuper diametrum A D. Quadratum maius quod fit ex ductu A D in ſe, æquale erit duobus quæ fiunt ex A C & C D in ſe ductis, per 46 primi: ſed A C & C D latera eiuſdem quadrati æqualia ſunt: erit igitur quadratum maius, duplum ad minus. Qualis autẽ eſt proportio quadratorum, talis eſt laterum eorundem ſubduplicata, per cõuerſam vndecimæ octaui: quare proportio lateris A D ad latus A C, eſt medietas duplæ: quæ irrationalis eſt, in nullis numeris reperibilis. Aliter demõſtratur, in eadem figura, quadratum diametri A D, duplum eſt ad quadratum coſtæ A C: ſed dupla proportio non eſt vt numerorum quadratorum: oportet igitur, per vltimam partem 6 decimi, diametrum eſſe coſtæ incõmenſurabilem. ¶Hinc euidens eſt, omnis orthogonij iſoſcelis, & latus maius, & Kathetum, vtrique lateri minori incommenſurabilia eſſe. Id ſtatim dignoſcitur in A D F orthogonio iſoſcele in data figura: cuius A F latus maius, C D Kathetus, & A D latus minus. ¶Rurſus perſpicuum eſt, diametrum & coſtã eiuſdem quadrati commenſurabiles eſſe potentia, etſi incommenſurabiles ſint actu. Multipliciter itaqꝫ poſſunt lineæ dici commenſurabiles: potentia & non actu, potentia & actu, aliquæ nec actu nec potentia. Lineæ potentia tantum commenſurabiles nullam inter ſe rationalem habent proportionem: ſed quæ ex eis conficiuntur quadrata ſunt rationalia. tales eſſe diametrum & coſtam eiuſdem quadrati, nuper eſt demonſtratum. Lineæ actu & potentia cõmenſurabiles, ſunt quæ inter ſe rationalem habent proportionem, & quadrata quæ ex eis oriuntur: vt linea bipedalis & quadrupedalis quæ duplam habẽt proportionem: earum autem quadrata, quadruplam. Nec actu nec potentia commenſurabiles, eæ ſunt quæ nec in ſeipſis nec in ſuis quadratis proportionẽ habent rationalem: huiuſmodi ſunt quæcunqꝫ latera incommenſurabilium quadratorum. Si nempè quadratorum irrationalis ſit proportio lateris vnius ad latus alterius erit identidem irrationalis: quia medietas irrationalis. Nullas reperiri poſſe lineas actu & non potentia commenſurabiles, hæc promptè declarant: nam ſi duo latera quadratorum rationalia ſunt, erũt & ea quadrata inter ſe rationalia: quum quæuis rationalis proportio duplam rationalem ſupra ſe recipiat: vt fuſius tradetur libro ſecundo.

Quibus modis aliqua cõmẽſurabilia dicantur.

¶Infinita extrema irrationalis proportionis conſtituuntur, diuiditúrque magnitudo omnis irrationali proportione.

Cap. IX.

IRrationalis proportionis ſpecies innumeræ ſunt, quibus deſunt impoſita nomina: proindè pleriſque ſatis videtur ſi irrationalium magnitudinum proportionem dixerint irrationalem eſſe, nullũ ſpecialius nomen exprimentes. Hos hoc loco ſecuti oſtendemus non modo inter diametrum & coſtam eiuſdem quadrati proportionẽ irrationalem eſſe, ſed & inter alias prope innumeras magnitudines. ¶Primum documentum, infinitæ ſpecies proportionis irrationalis medietate duplæ maiores procreabuntur, ſi exceſſus quo diameter quadrati coſtam ſuperat, in partes proportionales diſtinguatur, quæ gratia exempli dupla ſint proportione. Lateris quippe quadrati ad totum exceſſum, proportio eſt irrationalis, quòd (vt demonſtratum eſt) exceſſus ille, vt diameter, ſit lateri incommenſurabilis: eáque proportio maior eſt medietate duplæ. Rurſus lateris eiuſdem ad medietatẽ exceſſus proportio eſt irrationalis: ſi nempe totum ſit alicui incõmẽſurabile, eidem incommenſurabilis erit & eius medietas per 8 decimi: eritq́; eiuſmodi proportio maior priore, quare & maior medietate duplæ. Quoties enim aliqua extrema proportionem habent, ſi minus extremum decreſcat maiori inuariato, maior continuò fiet extremorũ proportio, per 8 quinti. Item eiuſdem lateris ad quartam partem exceſſus, & octauam, & ſexdecimam, & quamuis aliam ſequentẽ erit irrationalis proportio quauis præcedente maior, erit igitur in infinitum abitio: & quum infinite parua ſit aliqua pars proportionalis etiã aliquota, infinitè magna erit aliqua proportio irrationalis. ¶Secundum documentum, irrationalis proportionis infinitæ ſpecies medietate duplæ minores deſignabuntur exceſſu diametri ſuper coſtam, vt prius diuiſo: vt enim diametri ad coſtam irrationalis eſt proportio, ita ſi exceſſus prima pars proportionalis auferatur, diametri reſiduũ irrationalem proportionẽ ad eandem coſtam habebit, quæ minor erit medietate duplæ, per primã partem octauæ quinti. Si præterea ab hoc reſiduo ſecũda pars proportionalis dematur, quod reliquum erit irrationalem proportionem ſeruabit ad coſtam, præcedente & medietate duplæ minorem. Aſſiduè igitur per ſubtractionem minuetur proportio, donec ad æqualitatis proportionem peruentum ſit: hiſque modis duobus quacunque proportione irrationali inter aliquas quantitates præſtituta, poſſunt ea infinitę maiores & infinitæ minores præfiniri. ¶Tertium documentum, vt magnitudo omnis poteſt in partes proportionales rationali proportione diſtribui, ita & irrationali proportione. Id autem abſoluetur, ſi prius id ad memoriam reuocetur quo demonſtratum eſt totum corpus ad reſiduum à prima parte proportionali, eam habere proportionẽ qua corpus ipſum diuiditur. Vbi ergo pedanea linea proportione irrationali quæ dicitur medietas duplæ fuerit diuidenda: pro reſiduo à prima parte proportionali ſumẽda eſt pars illius pedanei, ad quã tota linea proportionẽ habeat quæ eſt medietatas duplæ. Quod vt aptius fiat, quadratũ conſtituatur, cuius diameter A B ſit pedalis: pro reſiduo igitur à prima parte proportionali eius coſta C B deſumenda eſt. Rurſus C B fiat diameter alterius quadrati cuius co-

Infinitæ ſpecies irrationalis proportionis.

Continui ſecundum irrationalem proportionem diuiſio.




ſta erit C D: mox pro reſiduo à duabus primis partibus proportionalibus ſumes in pedanea linea quātitatem æqualem C D. Et vt tertia pars proportionalis pateat, fiat C D diameter alterius quadrati, cuius D E ſit coſta, quam accipiemus pro reſiduo à tribus primis partibus proportionalibus. Si in infinitum hoc modo progrediamur ceu pręſens hic figura oſtendit, perſpicuum eſt primam partem ad ſecundam proportionē habere, quæ eſt medietas duplæ. & ſecundam eodem modo ad tertiam, & tertiam ad quartā, ſic & in infinitū. Hoc ex his quæ in proportione rationali demonſtrata ſunt, euidentiā habet. Porrò partes illæ proportionales eam inter ſe rationem habent quam A B ad B C, & B C ad C D, & C D ad D E, & D E ad E F, & E F ad F G, ſicq; aſſiduè. Hæ autem quantitates continuam proportionem habent, quæ eſt medietas duplæ: quum quælibet præcedens ſit velut diameter, & proxime ſequēs velut coſta eiuſdem quadrati: quare & partes pedaneæ lineæ eādem proportionem obſeruabunt. hic ergo modus eſt quo magnitudinem omnem diuidere licebit in partes proportionales quauis alia irrationali proportione: ſignatis prius quantitatibus, quæ ſic ſe habeant continua proportionalitate. De irrationali proportione hæc quantulacunque impræſentiarum ſatis ſint: cætera nempè altiora diſquirere non eſt loci præſentis: verum abſoluta proportionalitatum traditione, tres irrationalium proportionum difficultates, vt in cæteris abſoluere aptius expediet.

¶PRIMI LIBRI, QVI DE RATIONALI ET irrationali proportione eſt, finis.

# LIBER SECVNDVS, CVIVS DE PROPORTIONALITATIBVS POTISSIMA EST enarratio.

## De diffinitione proportionalitatis, & proportionalitatum speciebus. Cap. I.

PRoportionalitatum commoditas nõ modo astronomicis geometricisve supputationibus, sed & philosophicis congressionibus plurimo est in vsu: quum ne vnum quidem motum altero velociorem aut tardiorẽ, sine hac liceat deprehendere. Quæ enim comparantur motuum velocitates, sunt vt proportiones: omnis siquidem velocitas ex proportione agentis ad resistentiam patientis perpenditur: quarum velocitatum cõparatio, non alia est quàm proportionum cõparatio seu habitudo, quam proportionalitatẽ dicimus. Est igitur proportionalitas, plurium proportionum vnius ad alteram certa habitudo, cuius definitionis particulæ singulæ, claræ sunt. sicut igitur numerus aliquis ad alterum comparatur, ita proportio aliqua, potest ad alteram cõparari: quum ei æqualis, aut ea maior vel minor sit. Velut si comparem quadruplam proportionẽ ad duplam, quum quadrupla maior sit dupla, inter eas habitudo erit, quã proportionalitatem & proportionem proportionum nuncupamus; omnis enim proportionalitas est proportio, at non contrà. Proportionalitatis alius ab hoc est vsus apud Geometras, estq; hęc particularior appellatio: quam sic deffiniunt. Proportionalitas, est proportionum similitudo. Per similitudinem, æqualitatem intelligunt: eæ autem proportiones æquales sunt, quibus similis inest denominatio: nullæq; proportiones diuersarũ denominationum ęquales dicuntur aut similes. Solam idcirco proportionem proportionum æqualium, proportionalitatem appellant: quam ob id & æqualitatem & medietatem dicere cõsueuerunt. ¶ Porrò, medietatum species decẽ sunt institutæ, quibus vndecimam adiecit Iordanus: at non de omnibus sit in præsens cura: veruntamen cæteris omissis tres aut quatuor, quæ frequentius in vsum veniũt, referamus. Eæ autem sunt medietas Arithmetica, Geometrica, Harmonica, & perfectissima: & quęuis harum, tres aut quatuor exigit terminos quibus exprimatur. Medietas Arithmetica, est habitudo quantitatũ sese æquali excessu superantium: vt inter 10 6 8 4: sicut enim 10 per 4 excedit 6, ita 8 per 4 vincit 4: est idcirco talis excessus primi ad secundum, qualis tertij ad quartũ. Medietas seu æqualitas Geometrica, est habitudo quantitatum quæ similem habent Geometricam proportionem: vt sunt 8 4 6 3, nam primi ad secundum & tertij ad quartum dupla est proportio. Idem fuerit & de his 8 4 2 1, vt enim primus ad secundum, ita secũdus ad tertium, & tertius ad quartum. Medietas Harmo-

*[Margin notes:]* Quid ꝓportionalitas. — Medietates quatuor præcipuæ. — Arithmetica — Geometrica medietas.

Harmonica.

nica,quæ & Muſica,eſt habitudo quantitatum,quarum maximę ad minimā
talis eſt proportio,qualis eſt exceſſuum inter ſe:vt 6 4 3,velut enim 6 ad 3 du-
pla eſt proportio,ita binarij,qui eſt exceſſus primi ſuper ſecundum,ad vnita-
tem,quæ eſt exceſſus ſecūdi ad tertium.Idem fuerit de 6 3 2,& de his 12 6 4.
Plurimę his medietatibus cōgruunt proprietates,quas hoc loco recenſere no-
ſtri inſtituti limites tranſcenderet:quū ſola Geometrica medietas nec ea ſem-
per nobis curæ ſit.In reliquis idcirco Euclidem,Boetium,& Iordanum cō-
ſuluiſſe iuuabit. ¶Harum proportionalitatum quæuis continua eſſe poteſt,

Continua proportionalitas.

aut diſcontinua,ſeu diſiuncta.Continuam dicunt ſi primi termini ad ſecun-
dum talis reperiatur proportio,qualis ſecundi ad tertium,& tertij ad quartū,
vel ſi quantum primus terminus addit vel minuit ſuper ſecundum,tantūdem
ſecūdus ſuper tertium,& tertius ſuper quartum addat minuátve.Id in Geo-
metrica proportione declarant 8 4 2 1:& quotcunq; numeri pariter pares ſuo
ordine conſtituti.Sic in Arithmetica videre eſt inter 8 6 4 2:& inter quotvis
numeros naturali ſerie diſpoſitos.Hanc continuā proportionalitatem in tri-
bus quatuor pluribúſve terminis liberum eſt reponere:at ſi tantum tres ſint,

Diſcōtinua proportionalitas.

medius duorum munere fungetur. Diſcontinua ſeu diſiuncta proportiona-
litas,inter eos terminos cōſtituitur,qui ſuæ proportionis interruptionē quā-
dam habēt,ita vt proportio primi ad ſecūdum,ſit proportio tertij ad quartū:
nec ea inter ſecundum & tertium ſit:id generis medietatem habent 10 5 4 2:&
12 8 6 2.Oportet proinde diſiunctam proportionalitatem quatuor ſaltem ter
minis conſtare:hócq; vno ſatis à continua diſſidet.Rectè idcirco & Iordanus
ait libro ſecundo diſiunctæ proportionalitatis media diſſociari:cōtinuæ autē

Perfectiſſima proportionalitas.

media aſſociari. ¶Perfectiſſima proportionalitas,eſt habitudo quantitatum
inter quas diuerſimode cōparatas,tres expoſitæ ſpecies reperiri queunt.Non
eſt enim incōmodum inter duo extrema diuerſas quātitates locare,quarum
vna ad extremas Arithmeticam,alia Geometricam,alia Harmonicam ſerua
bit proportionalitatem:quod varia rerum ſimilitudine Boetius arithmetices
libro ſecundo pulchrè expoſuit. Hanc ſpeciem in his quatuor terminis licet
dignoſcere,12 9 8 6:eo nempè ordine quo ſituantur,numeri Geometricā ha-
bent proportionalitatem diſcontinuam:vt enim 12 ad 9,ſic 8 ad 6,eſt ſeſqui-
tertia proportio.Præterea primi ad ſecundum,& ſecundi ad quartū propor-
tionalitas eſt Arithmetica:nam quo exceſſu 12 ſuperat 9,eodem 9 vincit 6.
Rurſus primi ad 3,& tertij ad quartum, harmonica eſt medietas: qualis eſt
enim proportio 12 ad 6 minimum terminum,talis eſt exceſſus maximi ſuper
medium(qui eſt quaternarius)ad exceſſum medij ſuper minimum,qui eſt bi
narius:nam vtraq; eſt dupla proportio.his ergo modis perfectiſſima comple-
tur proportionalitas:hoc nomen ſortita,quòd & tres pręcipuas medietates,&
omnes muſicas conſonātias amplecti putetur:de quibus nō præſentis eſt loci
differere.Hanc ſpeciē nō paucioribus quàm quatuor terminis poſſe reperiri
æſtimandum eſt:verum in pluribus eam dari non eſt incōmodum,ceu videre
licet in his quinq;,45 25 15 9 5. Primi nanq; ad medium & medij ad vltimū,
tripla eſt proportio:quare & geometrica proportionalitas erit.Deinde primi
ad ſecundum,& ſecundi ad quintū eſt Arithmetica proportionalitas:quum

idem ſit exceſſus, quippè 20. Tandem primi ad quartum, & quarti ad quintū harmonicam deprehendes proportionalitatem: nam vt maximi ad minimū nōcupla eſt proportio, ita differentiæ maiorū ad differentiā minorū. Sed hæc omittamus, regrediamurq; ad eam quā tradere occœpimus ꝓportionalitatē.

## ℭ De varia proportionum comparatione, additione, & multiplicatione. Cap. II.

*Proportionalitatis diuiſio.*

PRoportionum proportio, quam antè definiuimus, aut eſt inter proportiones æquales inuicem cōparatas: hancq; proportionalitatem æqualitatis appellant, aut (ſi quum geometris loquendum eſt) proportionalitatem ſimpliciter, & medietatē: de cuius ſpeciebus ſuccinctè capite præcedenti eſt diſputatum. Aut proportiones inæquales cōparantur, ſicq; ea habitudo dicetur proportionalitas inæqualitatis. In ea autem ſi proportio maior ad minorem cōparatur, proportionalitas eſt maioris inæqualitatis: vt habitudo quadruplæ ad duplam: ſi minor ad maiorē referatur, proportionalitas eſt minoris inæqualitatis. Proportionalitas inæqualitatis in rationalem & irrationalem ſecernitur. Rationalis, eſt inter proportiones cōmenſurabiles. Proportiones autem cōmenſurabiles, ſunt quæ habēt eandem proportionem partem cōmunem: ſiue ea rationalis ſit, ſiue irrationalis: velut ſunt quadrupla & dupla, medietas enim duplę bis ſumpta duplā efficit, & quater ſumpta quadruplam: ſimile eſt de quadrupla & ſexdecupla, quæ duplam habent partem cōmunem. Irrationalis proportionalitas, per oppoſitū inter eas proportiones conſtituitur, quæ incōmenſurabiles ſunt: quæ autem cōmenſurabiles aut incōmenſurabiles ſint, ſigillatim ſequens caput enarrabit. Rationalis proportionalitatis maioris inæqualitatis, quinque ſunt ſpecies, multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, & multiplex ſuperpartiēs: quarum definitiones & ſubdiuiſiones conſentanee ad alias primi libri præfigere expedit. Quæuis autem ſignatarum proportionalitatū poterit inter aliquas ꝓportiones reperiri: ceu ſequētia declarabunt. At quum inæqualium proportionum proportio per exceſſum maioris ſupra minorem (vt in ſimplicibus quātitatibus) dignoſcatur, prius cōſiderādum videtur quæ proportio minor aut maior ſit altera: & quo exceſſu maior minorem ſuperet.

*Proportionalitatis ſpecies.*

ℭ Primum documētum, inæqualium proportionum maioris inæqualitatis, ea maior eſt cēſenda cuius denominatio maior videbitur. Denominatio autē proportionis non vt libro primo eſt hoc loco intelligenda, ſed vt Iordanus in definitionibus libri ſecundi ad hunc modum nobis expreſſit. Denominatio proportionis maioris quantitatis ad minorē, dicitur numerus ſecundum quē eum continet, & pars vel partes minoris, quæ in maiore ſuperfluunt. Omnis ergo multiplex proportio nomen ſuſcipit à numero ſecundum quē quātitas maior minorem colligit, vt tripla à ternario, quincupla à quinario. Superparticularis proportio denominationē ſortietur ab vnitate & parte minoris quātitatis, quę in maiore ſuperfluit: vt ſeſqualtera ab integro & vna medietate, ſeu à tribus medietatibus: ſeſquiquinta ab integro & $\frac{1}{5}$, quæ $\frac{6}{5}$ conſtituunt, denominationem accipiet. Superpartientis proportionis denominatio exurgit ab

*Proportionum maioris inæqualitatis comparatio.*

*Denominatio proportionis quid.*

integro & partibus maioris quantitatis, quæ in maiore superfluunt: nam superbipartiens quintas ab integro & $\frac{2}{5}$: supertripartiens quartas ab integro & $\frac{3}{4}$, quæ $\frac{7}{4}$ reddunt, suam desumit appellationẽ. Quibus & multiplicis superparticularis & multiplicis superpartientis denominatio constet, hinc cuiq; peruiũ est. Diuersarum ergo proportionum si denominationes comparentur, dignoscere licebit omnem proportionem multiplicem, maiorem esse non multiplici: quandoquidem in omni multiplici maius extremum pluries minus colligit, quod in nõ multiplici nequaquam fieri videmus. Inter multiplices (modo ex parte multiplicitatis cætera seruẽtur paria) multiplices compositæ alijs maiores sunt: vt dupla superparticularis & dupla superpartiẽs, dupla simplici maiores perhibentur. Multiplicium simplicium ea maior erit, quæ à maiori numero nomen habet: & minor, quæ à minori; quadruplam enim tripla maiorẽ dicunt. Superparticularium proportionum eam maiorem dixeris, cuius quãtitas maior maiore parte minoris superfluit. Ob id omnium maxima est sesqualtera, quòd in ea maior quantitas medietate minoris superfluat, sitq; medietas, partiũ aliquotarũ maxima: est demũ sesquitertia maior sesquiquinta. In superpartiẽtibus, ea maior est cuius partes minoris, quæ in maiore superfluunt, maiores percipiuntur: quo modo superbipartientemtertias maiorem superbipartientequintas censebimus, & supertripartientemquartas maiorem superquadripartientenonas vel supertripartienteseptimas. Superparticularis proportio, non semper maior est, aut semper minor superpartiente: sed dum pars quæ in maiore superfluit, maior est partibus in eodem superfluentibus, superparticularis maior est superpartiẽte: sin è diuerso, minor. Vt sesqualtera maior est superbipartiẽtequintas: & eadem minor est superbipartiẽtetertias. Etsi innumeræ possint cõparãdarum proportionum mixtiones effici, per ea tamẽ quæ tradidimus, maiorẽ statim à minore vel minimo negocio secernes.

Comparatio proportionum minoris inæqualitatis.

¶ Secundum documẽtum, inter proportiones inæquales minoris inæqualitatis ea maior dicenda venit, cuius denominatio maior conspicitur. Denominatio autem (inquit Iordanus libro secundo) proportionis minoris quidem quantitatis ad maiorem, dicitur pars vel partes quota vel quotæ illius scilicet maioris fuerint. Vult itaq; denominationẽ subduplæ proportionis esse à medietate: quod extremũ minus, maioris sit medietas: ita & subquincuplam, à quinta parte vocari. Rursum subsesqualteram à duabus tertijs, & subsuperbipartientemtertias à tribus quintis appellationem sortiri. Quum itaq; medietas maxima sit partium aliquotarum, erit subdupla proportio omnium submultiplicium maxima. Præterea subsuperparticularis omnis quauis submultiplici maior censebitur, quòd illa ab vnica parte aliquota denominationem suscipiat: hæc autem, semper à pluribus. Omnis denique submultiplex maior est submultiplici superparticulari, & submultiplici superpartiente. Et vt summatim dicatur, si duabus proportionibus maioris inæqualitatis hæc vocula sub præponatur, quæ maior erat, minor fiet: & quæ minor, maior. hæc siquidem præpositio, inuersam signat extremorũ comparationẽ: quare ex 8 quinti Euclidis, & nona secundi Iordani, verum erit quod assumebatur. Vt enim 6 ad 2 maior est proportio q̃ 4 ad 2, ita 2 ad 4 maior erit q̃ 2 ad 6: quare licet

tripla maior sit dupla, est nihilominus subdupla subtripla maior. ❡ Tertium documentum, quotvis proportiones (vt numeri) simul addi iungiq; possunt: ex eisq; vna in summo propter additionem consurgit. Fit autē additio in hūc modum. oblatarum proportionum primi termini statuūtur, ducunturq; extrema maiora inter se, rursumq; minora inter se: & quę inter productos terminos est proportio, ex primo datis proportionibus exactè componitur. Velut si dupla & superbipartienstertias iungendæ sint, quum primi termini vnius sint 2 & 1, alterius vero 3 & 5, ducto 2 in 5, fit 10: & ducta vnitate in 3, fit 3: proportio igitur quæ est inter 10 & 3 tripla quippè sesquitertia, ex dupla & superbipartientetertias cōstat: quum 10 ad 5 dupla sit, & 5 ad 3 superbipartienstertias. Non maiori negotio ex tribus quatuórve proportionibus vnicam cōflabis extremis maioribus in se ductis, & minoribus in se: secūdum quē modum ex his tribus dupla, sesqualtera, & superbipartientetertias, quincuplam reddemus, qualis est 30 ad 6: nam 30 ad 15 est dupla: 15 ad 10 sesqualtera: & 10 ad 6 superbipartienstertias: & si aliter compares 30 ad 20 sesqualtera, 20 ad 12 superbipartiēstertias, & 12 ad 6 dupla identidem videbitur: nec aliqua ex parte variabitur cōpositio: quod aperiens Iordanus 8 quinti ait, Quotlibet proportiones quocunq; ordine continuatæ, eandem proportionem constituunt. hic addēdi modus declaratur quinta definitione sexti Euclidis, qua ita scribitur. Proportio ex duabus aut pluribus proportionibus constare dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ aliquā efficiunt quantitatē. vbi proportionum quātitates, interpretantur earū esse denominationes: velut clarius expressit Iordanus octaua noni, in hūc modum. Omnis proportio ex duabus composita, ex ductu vnius in reliquam producitur. Volunt autē expositores proportionem aliquā in aliā ducere, nihil aliud esse q̄ vnius denominationē in alterius denominationē ducere. At proculdubio nihili refert si proportionum denominationes in se duxeris, aut earū extrema modo nuper exposito. Si nempè binarium duplæ denominatorem, in $\frac{5}{3}$ denominatorē superbipartientis tertias duxeris, $\frac{10}{3}$ seu $\frac{10}{3}$ cōficies: à quibus proportio tripla sesquitertia nomen habet, ceu docuit primū huius documentum: id autem & in singulis licet deprehendere. Visa est nihilominus additio per extremorum multiplicationem expeditior, q̄ quæ denominationū multiplicatione fit, eam idcirco impræsentiarū tradidimus. Ex his intelligere licet quæ Iordanus libro nono de proportionum additione tradidit: quum inquit propositione 22, Si duæ multiplices iungantur, composita erit multiplex. Et 45, si duæ diuersæ superparticulares coniungantur, cōposita aut erit dupla aut superparticularis aut superpartiens. Item propositione 53 eiusdem, quælibet duæ superpartientes cōiunctæ proportionē quadrupla minorem cōstituent. Tandem 48 sic scribit, omnis superparticularis cum qualibet superpartiente constituit proportionē tripla minorem. De his qui plura videre exoptat, ex eo libro passim colligere potest. ❡ Quartum documētum, omnis proportio potest quouis modo multiplicari: potest enim duplari, triplari, quadruplari, ac secūdum reliquas multiplicationis species augeri. Nec tamen proportionē aliquā duplare est ipsam per 2 vel duplam proportionē multiplicare, quod in numeris fit: sed est ipsam

Proportionum additio.

Proportionum multiplicatio.

seu suum denominatorem in se quadratè ducere. Velut si sesqualtera, quæ ab integro & medietate, seu à tribus medietatibus nomen habet, duplāda sit, ducentur $\frac{3}{2}$ in se, orientúrque $\frac{9}{4}$, quæ ad integra reductæ, binarium & $\frac{1}{4}$ reddunt: proinde dupla sesquiquarta à binario & $\frac{1}{4}$ nomen habens, dupla erit sesqualteræ. Rursum si $\frac{9}{4}$ per tres medietates ducātur, fiēt $\frac{27}{8}$, quæ in integra cōuersæ, tria integra cum $\frac{3}{8}$ efficiunt. Ergo tripla supertripartiens octauas ab illis nominata, tripla erit sesqualteræ. Si deniq; $\frac{27}{8}$ per $\frac{3}{2}$ ducātur, $\frac{81}{16}$ creabuntur, quæ quincuplam sesquidecimamsextam denominant. Hæc igitur quadrupla erit sesqualteræ. Ita ergo cōtinuò progrediendum est, si vltra lubet procedere, postremum denominatorē per primū multiplicando. Id apertè tradidit Campanus vndecima definitione quinti Euclidis, quum inquit. Tripla proportio in se multiplicata, producit noncuplam: & tripla in noncuplā, producit vigecuplam septuplam: erit itaq; proportio extremorū vigecupla septupla, quod est triplum tripli. hæc ille: in quibus per proportionum multiplicationē, vult clarè intelligi denominationum multiplicationem. Etsi hic multiplicandi modus plus satis sufficiens sit, iuuat tamen faciliorem subnectere consentaneē ad additionē præmisso documēto traditam. Omnis itaq; proportio duplabitur, si primis eius terminis acceptis, quilibet eorum in se quadratè ducatur: nam productorum terminorū proportio dupla erit ad præstitutā. Quod si iidem termini ducantur in se cubicè, creatorum proportio tripla erit ad primā: hos rursus per primos ducens, quadruplæ proportionis terminos reddes: sic & in reliquis. Quum igitur tripla proportio duplanda est, ternarius maius extremum triplæ, in se ducetur, fietq; nouenarius: & vnitas minus extremum in se multiplicabitur, nec aliud quàm vnitas succrescet: proportio itaque noncupla nouenarij ad vnitatem, dupla erit triplæ. Præterea nouenario per 3 ducto, 27 oriuntur: quūmq; idem semper sit extremum minus, proportio inter 27 & 1, erit tripla triplæ. Tandem si 27 per 3 ducātur, 81 prosilient: quorum proportio ad vnitatem, quadrupla est triplæ. Porrò si sesqualtera proportio duplanda sit, quum eius primi termini sint 3 & 2, vterq; in se ducetur, fientq; 9 & 4, quorum proportio est dupla sesquiquarta: hæc itaque dupla erit sesqualteræ: hi termini si per priores ducātur maior per maiorem, & minor per minorem, 27 & 8 apparebunt: quorum proportio tripla supertripartiēs octauas, est tripla sesqualteræ. Posteriores hi termini si per primos ducātur, 81 & 16 fiēt, quorum proportio quadrupla est sesqualteræ. Vt ergo in simplicibus quantitatibus pedale corpus duplicantes, alterum pedale ei iungimus: cōfectóq; duplo si simplum adijciatur, simpli triplum fit: cui demū aliud simplum appositū, quadruplū reddit: ad huncq; modum continua simpli adiectione omnia eius multiplicia succrescunt. Ita proculdubio vt cuiuis proportioni similem adieceris, eius duplam conficies: cui eadem simplex iuncta, triplam simplicis constituit: huicq; simplex alia superueniēs, simplicis quadruplam. Id autem nuper efficere docuimus, continua additione quāuis proportionem multiplicantes. Est etenim multiplicatio, additio quædam: hoc tamē discriminis habet quātitatum multiplicatio à proportionū multiplicatione, quòd illa ductu vnius in alterā statim & sine crebra additione fiat (ductus enim 4 in 5, 20 quinnarij

quadruplum ſtatim reddit)hæc vero minimè. Iam tempus eſt ſequens caput aggrediamur, hinc tamen ſumpto eius exordio.

## De proportionum ſubtractione, diuiſione, & commenſurabilitate. Cap. III.

QVæ antè tradita ſunt, declarant apertè omnē proportionē extremi ad extremum ex proportionibus extremorum ad media & mediorum inter ſe in vnguem conflari. Idq; ab Iordano inter definitiones ſecundi ad hunc modum traditum eſt. Quum continuatæ fuerint eædem vel diuerſæ proportiones, dicetur primi ad vltimū proportio ex omnibus compoſita. Vnde ſtatim dignoſci poteſt quibus proportionibus cōſtet quæuis proportio, tripla etenim proportio quæ inter 3 & 1 eſt, ex ſeſqualtera quę eſt trium ad duo, & dupla duorū ad vnum cōponitur. Suntq; ibi dupla & ſeſqualtera, vt vult Iordanus cōtinuatæ: quòd vnius extremum minus, ſit alterius maius extremūm. Proinde in ſupertripartiente quartas, ſuperbipartiēs quintas, quæ eſt 7 ad 5, & ſeſqualtera quæ eſt 6 ad 4, nequaquā cōtinuantur. idcirco nec illam componunt. Verum ea ex ſeſquiſexta, ſeſquiquinta, & ſeſquiquarta cōponitur: itemq; ex ſuperbipartiēte quintas & ſeſquiquarta: præterea ex ſeſquiſexta & ſeſqualtera. Rurſum ſeſqualtera ex ſeſquiquinta & ſeſquiquarta componi deprehēdetur. Etſi igitur eiuſdem proportionis diuerſæ ſint compoſitiones, eædem nihilominus ſunt componentes partes, quod nihil incōmodi eſſe ſic declarat octaua quinti Iordani. Quotlibet proportiones quocunq; ordine cōtinuatæ, eandem proportionem conſtituunt. Hac igitur arte cuiuſq; proportionis componentes partes diſquiri queunt, ſi inter eius terminos medium aliquod decidere donetur. Licet enim ſeſqualtera trium ad duo, nullas partes habere videatur, hæ nihilominus mox apparebunt, vt ſeſqualteræ terminos 6 & 4 effeceris: ea igitur conſtabit ſeſquiquinta & ſeſquiquarta. Demum ſeſquiquarta quæ eſt inter 10 & 8, in ſeſquinonam & ſeſquioctauam diſpeſcitur: rurſum ſeſquioctaua, in ſeſquidecimāſeptimam & ſeſquidecimāſextam: hāc tādem in ſemper diuiſibiles ꝓportiones licet ſubdiuidere. Eſt itaq; proportio omnis vt continua quantitas, cuius minimam partem ſignare non eſt: & ex infinitis proportionibus, vt proprijs partibus cōponitur. Eſt præterea omnis proportio minor maioris pars, ſi non aliquota ſaltem nō aliquota: quare vt in quātitatibus ſic in proportionibus minor maiorē aliqua ex parte efficit, concurritq; in eius integram cōpoſitionem. Proinde non modo quęuis minor proportio poteſt à maiore tanquam pars à ſuo toto ſubduci, verū etiā infinitæ: quādoquidem vnica dempta infinitæ demuntur. Cæterum ex his quæ de proportionum multiplicatione demōſtrauimus intelligere licet eam proportionem ad alteram duplam dici, quæ bis eam inter ſua extrema continuatim colligit: & triplam, quæ ter: ita & in reliquis multiplicibus. Dicetur etenim ſexdecupla, quadrupla duplæ, quòd inter 16 & 1 quatuor duplæ conſpiciantur: prima quidem 16 ad 8, altera 8 ad 4, tertia 4 ad 2, quarta 2 ad 1. Rurſum ſexdecupla dupla quadruplæ cenſebitur: & octupla tripla duplæ. Seſqualteræ proportionalitatis, & ſuperbipartientiſtertias, omnium tandem

Quibus partibus quæuis proportio cōponatur.

Vt quæuis proportionalitas definienda ſit.

ſpecierum definitiones per hæc reddi poſſunt:patétq; ampliter via qua probemus quænam inter duas quaſuis proportiones ſit proportionalitas. Quadrupla enim proportio quum dupla ſit duplæ,ſitq; dupla quadruplæ medietas,octuplam proportionẽ,non duplam ſed tãtum ſeſqualteram quadruplæ cenſebimus:quòd nõ ex duabus quadruplis,ſed ex quadrupla & eius medietate componatur. hac arte dixeris trigecuplam duplam proportionẽ,habere proportionalitatem ſuperbipartientemtertias ad octuplam:quòd 32 ad 4 ſit octupla proportio,& 4 ad 1 quadrupla,quæ eſt $\frac{2}{3}$ octuplæ. Sint autem de re propoſita documẽta. ℂPrimũ,poteſt omnis proportio minor à maiore ſubduci,factáq; ſubtractione reſidua proportio patebit,ſi proportiones datæ in primis terminis conſtituantur:& prioris minor terminus in poſterioris maiorem ducatur,priorisq; maior in poſterioris minorẽ:quæ ſubinde inter ortos numeros deprehẽdetur proportio,ea erit quæ facta ſubtractione minoris à maiore relinquitur. Vt quum à dupla lubet ſubtrahere ſeſqualteram,quæ minor eſt,primos terminos duplæ deſumo 1 & 2,& ſeſqualteræ terminos 2 & 3:ducta vnitate in 3,ſit 3:& ducto 2 in 2,ſit 4:inter 4 & 3 proportio eſt ſeſquitertia. Dico igitur ſubducta ſeſqualtera à dupla,ſeſquitertiam relinqui: eamq; exceſſum eſſe maioris proportionis ſupra minorem. Ea arte ſubducta proportione ſuperbipartiente tertias à tripla,proportio ſuperquadripartiens quintas relinquetur:quod ex habitudine 9 ad 5 ſtatim intelligitur. Hunc ſubtrahendi tenorem ſcitè tradidit Iordanus prima quinti. Nemo falſè cenſeat quaſdam proportiones eam inter ſe habere proportionem per quã maior minorem ſuperat:aliud quippè eſt exceſſus vnius proportionis ſuper alteram, aliud eius proportio ad alteram. Octupla ſiquidem proportio quadruplam excedit dupla,nec tamen dupla ſe habet proportione ad illam,ſed ſolum ſeſqualtera,quod ex antè dictis ampliter notum euaſit. Idq; libro quinto exprimens Iordanus,inquit, Differentia proportionis ad aliam,vocatur illa proportio qua eadem ſupra reliquam abundare dicitur. Si forſan hunc exceſſum ſeu differentiam proportionum optes ſecus dignouiſſe,hoc vnum perbreue ſumito documentum. Talis eſt inæqualium proportionum differẽtia,qualis eſt ſuarum denominationum proportio. Nam tripla excedit duplam per ſeſqualteram,qua proportione ſe habet denominator triplæ ad denominarorem duplæ:item quincupla triplam per ſuperbipartientẽtertias ſuperat. Præterea ſuperbipartiẽſtertias ſeſquitertiam ſeſquiquarta ſuperat:quòd hæc proportio ſit inter $\frac{5}{3}$ & $\frac{4}{3}$ earum denominationes. huius & prioris operationis vna eſt demõſtratio:quẽ proinde expeditiorẽ dignoueris pro voto ſequere. ℂSecũdum documentum,vt proportio omnis,cõtinua eiuſdem additione quouis modo multiplicatur,ita & omnis proportio cõtinua ſubtractione diuidi poteſt. Fiet igitur continua minoris à maiore ſubductio donec nihil aut minus minore proportione ſuperſit:patebit'que quoties minor in maiore reperiri poteſt. Vt quum proportio ſeptupla diuidenda eſt per duplam,ſubtrahitur in primis dupla à ſeptupla,manẽtque proportio tripla ſeſqualtera:à qua rurſus dupla demitur,& relinquitur ſupertripartiẽſquartas. Hæc autẽ quum minor ſit dupla,non eſt vltra progrediendum:quare dicendum ſeptuplam proportionem

Proportionum ſubtractio.

Proportionum differentia.

Proportionum diuiſio.

duas duplas & supertripartientēquartas colligere,ex eisq; componi:& ea per duplam diuisa,binarius in quotiente reperitur. Ad eundem propè modum si septupla per sesqualterā diuidatur,in quotiente quaternarius conspicietur: manebitq; indiuisa proportio superpartiens $\frac{31}{81}$. Componitur idcirco septupla proportio ex quatuor sesqualteris & superpartiente $\frac{31}{81}$:quod videre conuenit in his terminis 567 & 81. Hinc manifestius apparet diuisionem,quādam esse subtractionem:quod ex additione ad primā quinti Iordani satis declaratur.

Proportionum commensurabilitas.

¶ Tertium documentū,quò dignoscamus an oblatæ quædam proportiones cōmensurabiles sint,an incōmēsurabiles,minor à maiore subtrahatur,donec minus ea supersit:& residua proportio à minore,hócq; secundum residuū ab alia dematur quoad fieri poterit:velut antè de numerorum cōmēsurabilitate est declaratum. Si igitur ad æqualitatem quàndoq; deueniatur,proportiones cōmunicantes erunt in minima inuenta proportione:si vero in infinitum sit abitio,incōmensurabiles erunt. Quo fit vt quadrupla & octupla cōmunicātes sint:dempta enim quadrupla ab octupla,dupla manet,qua demū à quadrupla subducta,dupla relinquitur,quæ æqualis est alteri duplæ:quare hæc pars est aliquota octuplæ & quadruplæ,quæ ob id cōmensurabiles sunt. Hic disquisitionis modus ab Euclide depromptus est:secundum quē supramodum fuerit difficile proportiones metiri,quum plerunq; eas existimabimus commensurabiles,& vix ante trigesimam subductionem poterit pars aliquota dignosci,sed nec quandoq; ante centesimam,quod perraro in numeris fieri conspicies. Proinde ne tædiosa & vana sit operatio,rei huius tradēdum est documentum:quo primo intuitu an commensurabiles vel incommensurabiles sint proportiones discernamus.

Quæ proportiones cōmensurabiles sint.

¶ Quartum documentū,omnes duæ proportiones commensurabiles sunt,si inter primos terminos maioris illarum vnus vel plures cadunt medij proportionales proportione altera minori vel eius parte aliquota:quòd si nulli medij hoc modo proportionales inter primos terminos ceciderint,datæ proportiones incommensurabiles erunt. Volo innuere octuplam & duplam cōmensurabiles esse:quia inter 8 & 1 primos terminos octuplæ,reperiuntur 4 & 2,qui inter se & cum extremis cōtinuè proportionales sunt dupla proportione,quæ minor erat datarum:eodem pacto dixeris sexdecuplam & octuplam cōmensurabiles esse:licet enim inter 16 & 1 non reperiātur termini proportionales proportione octupla,reperiūtur tamen proportionales proportione dupla,quæ est pars aliquota,& tertia pars octuplæ: quod sequens documentū perfectius indicabit. Gratia posterioris partis documēti,dicimus duplam & sesqualterā incōmensurabiles esse:item triplam & quadruplam,nā inter 4 & 1 nullus est medius numerus qui triplam proportionalitatem efficiat cum extremis. Quò autē dilucidiora sint omnia (prima documenti parte euidentiam ex rei definitione suscipiente) iuuat partem posteriorem demonstrare. Nam si inter primos terminos alicuius proportionis non cadat numerus proportionaliter medius,nec inter secundos,aut tertios, aut quotvis alios poterit proportionaliter medius reperiri:& si inter quosdā terminos alios à primis reperiatur proportionaliter medius,similis & inter primos reperietur. Hoc assumptū patet:datis A & C,qui sunt quarti termini suæ proportionis,& inter quos cadat B,numerus proportionaliter medius:si

inter nullos minores A & C cadat proportionaliter medius data proportione, sintq́ A B C minimi suæ proportionalitatis, erunt per tertiã octaui Euclidis, A & C contra se primi: si A & C sunt contra se primi, erunt ex 23 septimi Euclidis, & 20 tertij Iordani, minimi termini seu primi suæ ꝓportionis, quod est contra hypothesin. Fieri ergo non potest vt A B C sint minimi termini suæ proportionalitatis, A tamen & C non sint primi suæ proportionis: quare si inter A & C quartos terminos suæ proportionis cadat aliquis proportionaliter medius, necessum est inter primos secundos & quotvis alios terminos eiusdem proportionis terminũ proportionaliter medium reperiri, quod demonstrãdum sumpseramus. Ne forsan quis hæsitet an partẽ aliquotam data quæuis proportio suscipiat, sit aliud documentum præsentis pro parte secũda enucleatiuum. ℭ Quintum documentũ, omnis proportio & ea sola aliquotã partem habet rationalem, inter cuius primos terminos vnus vel plures medij reperiuntur continuò proportionales Geometrica proportione. Sic igitur dupla nullam habet partem aliquotã rationalem: quum inter 2 & 1 vel si mauis 4 & 2 nullus sit numerus proportionaliter medius: sic nec tripla aliquotam partẽ habet. Quadrupla autẽ medietatem, ꝙ inter 4 & 1, 2 sit proportionaliter medius: rursus octupla tertiam partem habet, nam inter 8 & 1 duo sunt termini proportionaliter medij 4 & 2. Id vnũ ex præcedenti documento noueris demonstratũ: si ex primis terminis datæ proportionis nõ deprehẽdatur pars aliquota, eãdem nec ex quibusuis alijs haberi posse. Hinc veritas innotescit 60 & 61 noni elementorum Iordani, quibus ad hunc modum tradit. Multiplex proportio in aliquot æquales distribui non potest præter multiplices. Altera. Nulla superparticularis proportio in aliquot æquales proportiones est diuisibilis. Quibus fit partem omnem aliquotam multiplicis proportionis multiplicem esse: nullamq́ superparticularem proportionem partẽ aliquotam habere. Qui plura hinc deducere optauerit, Iordanum consulat: à quo plures huiusmodi proportionum proprietates haurire licet.

*Pars aliquota proportionis vt inueniatur.*

ℭ Falsæ cuiusdam opinionis de proportionalitatibus reprobatio. Cap. IIII.

PRoportionum proportio, essetne in simpliciũ proportionum ordinẽ referenda, multi verterũt in dubium: eorumq́ pars optima eam simplicis proportionis speciem quãdam esse censuit: omnẽmq́ proportionem quantitatis rationem habere: quò dilucidius proportionum proportio, ceu quędam quantitatũ proportio æstimaretur. Id tamen prorsus dissuasisse visus est Euclides libro quinto elementorum, qui vt proportionem definiuit, statim alteram proportionalitatis subiunxit definitionem: inquiens eam esse proportionũ similitudinem: satis (me iudice) innuens proportionem à quantitate seiungi. Addendum, alio loco de quãtitatibus tradita esse theoremata, alioq́ loco de proportionibus: multãsq́ esse cõmunes animi sententias de quantitatibus, quæ in proportionibus demonstrationem exposcunt, quales sunt vndecima & 12 quinti. Proinde nonnulli his delusi cũcta ab Euclide, de simplicibus quantitatibus tradita sunt, de proportionibus ipsis perperam sunt interpretati, omnibus omnia permiscentes. ℭ Rursumq́ in tantũ

*Proportiões non habere rationẽ quãtitatum.*

errorís lapsi sunt, vt dicant proportiones omnes eam inter se proportionẽ habere quam earum denominatores: haud secus proportionum q̃ numerorum proportiones interstingẽtes. faciunt proinde octuplam duplam quadruplæ, & sextuplam duplam triplæ, triplamq́ duplæ. Id autẽ nihil prorsus est aliud quàm dicere proportionis maioris ad minorem, eam esse proportionem qua maior minorem superat. Vt enim sextupla proportio triplam superat per duplam, ita illius ad hanc, duplam dici volũt proportionem. Sic propemodum dupla proportio dicetur ipsis authoribus sesquitertia sesqualteræ, q̃ eam sesquitertia superet. Quãquã prẽmisso capite id nullatenus dici posse sit assertũ, iuuat nihilominus quantum hæc à veritate abscesserint, hoc loco fusius aperire: ne quis vltro in eundem labatur errorẽ. Coguntur in primis quicunq; eius sunt sentẽtiæ, ilico inficiari quãpiam proportionem bis suam medietatẽ colligere: aut ter suã tertiam. Octuplam enim quum duplam quadruplæ prædicent, nihilominus inter 8 & 1 extrema octuplæ, minime potest bis quadrupla proportio cõtinuatim reperiri: nec inter 6 & 1 bis tripla conspicitur. ad hæc, si quadrupla octuplæ vna sit medietas, eius subductione ab octupla quod relinquetur erit octuplæ altera medietas. Relinquitur autem dupla: hanc ergo octuplæ necessum est esse medietatem, & quadruplæ æqualem: quod impossibile est. Sibi idcirco nõ possunt non pugnare, quum asserũt esse proportionibus vtendum ac si merè quantitates essent: omnẽ tamen quantitatem bis suã medietatem amplecti, terq; suam tertiam: quod de proportionibus statim negare cogũtur. Præterea fatebũtur (velint nolint) quasuis proportiones cõmensurabiles esse, sicut & sunt numeri à quibus suam sortiuntur appellationem: dicant igitur quam partem cõmunem habẽt dupla & tripla, si cõmunicantes sunt proportiones: subuertantq; cuncta Geometriæ theoremata. Subuertent quidem nec ipsa modo, verum & Geometricas definitiones: quod lubet demõstrare. Constitutis nempè his tribus quãtitatibus cõtinuè ꝓportionalibus 1 3 9, ex definitione 10 quinti Euclidis, tertij ad primũ proportio, quæ est noncupla, dupla est ad proportionem secundi ad primum, quæ tripla est: nõ ergo sextupla, sed noncupla dupla erit triplæ: licet illius ad eius denominatorẽ dupla sit proportio. Ad idem (ne huic disputationi plus satis incubuisse videar) nouissimum addam argumẽtum. Nempè quum 6 & 2 triplam proportionẽ habeant: proportio quæ est inter quadratos eorum, dupla est ad triplam, per cõuersam vndecimæ octaui Euclidis, & tertiam sexti Iordani. Quadrati autẽ eorũ sunt 36 & 4, quorum nõ sextupla sed nõcupla est proportio: quare prorsus est à veritate alienũ sextuplam duplam esse triplæ (etsi 6 duplus sit ad 3) nisi forsan sextuplam proportionem imprudenter faciant nõcuplæ æqualem: quod perquam absurdum foret, ita quidem dicente Iordano libro secundo. Similes siue vna dicũtur proportiones, quæ eãdem recipiunt denominationẽ: maior vero quæ maiorem, & minor quæ minorẽ. In cæteris proportionibus similis sit demõstratio: hæc enim vnica poterit falsam opinionẽ funditus euertere, & si aliæ non minus euidentes duci possint. ¶ Hæc indubitatò sententia ob id fautores habuisse creditur quòd multam præ se ferat facilitatem: existimantq; omnes proportionalitatũ nexus (quorum ardua alioqui est enodatio) se statim nõ maiori negocio q̃ in numeris dissoluturos. At nõ minus in pro-

Falsæ opinionis declaratio.

Prima ratio

Secunda ratio.

Tertia ratio

Quarta ratio.

Quinta ratio.

Sexta ad id ratio.

pria quàm vera opinione cæcutiunt, si præsertim eos extra proportiones multiplicium proportionum deduxeris. Propositis siquidem dupla & sesqualtera proportionibus, quum dupla à duobus integris & sesqualtera ab integro & medietate nomen habeat, statim vltro fatebuntur duplæ ad sesqualteram esse proportionem sesquitertiam: qualis scilicet est denominatorum. Quòd si ita se res habeat, proportio dupla vltra sesqualteram, sesqualteræ tertiam partẽ comprehendet: per definitionẽ sesquitertiæ proportionalitatis. Habebit igitur sesqualtera tertiam partem, quæ rationalis erit proportio: nõ enim potest dupla proportio, sicut nec alia vlla rationalis, ex rationali & irrationali proportionibus exactè cõponi, quod irrationalis rationali addita irrationalem efficiat: ceu sequentia declarabunt. Si sesqualtera (vt probatum est) tertiam partem rationalem suscipiat, admittet proculdubio dupla quartã partem rationalem: eadem nempè proportio tertia pars fuerit sesqualteræ, & quarta pars duplæ. Iam autẽ quum dupla proportio quartã partẽ habeat rationalem, & cuiusq; rationalis proportionis multiplex, nõ minus q̃ ipsa sit rationalis, necessum erit medietatem duplæ (quæ est dupla ad eius quartam) rationalem esse proportionem. Diametri autem ad costam eiusdem quadrati, demõstrat penultima primi adiuuante vndecima octaui Euclidis, esse proportionem, quæ est medietas duplæ: eam igitur conueniet rationalem esse: eiusq; extrema, quæ sunt diameter & costa quadrati, cõmensurabilia dici. Quod si verum est, tota mathematicorum cohors cum Euclide suo principe non parũ illis debere videbitur: quòd nunquam antè scibiles duplę proportionis partes aliquotas, omnium primi scitas reddiderint: quæ prorsus erant inscibilia, scibilia efficientes.

Non posse proportionum denominationes aliter q̃ expositum est intelligi.

¶ At (dices) inficiabuntur proportiones sic suas denominationes sortiri, vt capite secundo huius est traditum: & sesqualteram nomen habere ab integro & medietate. Non tantum ergo nobis sed & Iordano cõtrauenient: nec ob id sanè in leuiorem trahentur errorem. Si nempe sesqualtera à binario, & sesquiquarta à quaternario nomen habeat, quid hoc ipso fuerit ineptius? Vt enim quadruplam ad duplam dicunt duplam esse, ita & sesquiquartã duplam duplæ ipsis authoribus dicere cõueniet. Fiet proinde respõdenter ad vndecimã quinti Euclidis sesquiquarta proportio, æqualis quadruplæ, pars scilicet toti: ita & sesquiquarta maior erit dupla, pars suo toto: quod extremæ absurditatis esse nemo non nouit. Porrò vbi dicere præsumerent sesqualteram proportionem à medietate, sesquitertiam à tertia parte, & sesquiquartã ab vna quarta suam sortiri denominationem: rursum in priorem errorem deciderẽt. Censeretur enim dupla proportio, quæ à binario integrorum denominationẽ habet, octuplam proportionẽ obseruare ad sesquiquartã: vt quæ à quarta parte vnius integri seu octaua parte duorum integrorũ nomen suscipiat. Esset proinde sesquiquarta octaua pars duplę: & sesqualtera, quarta pars eiusdẽ: quare & dupla sesqualteræ, medietas esset duplæ. Hæc autem rationalis esset, quòd multiplex sit ad rationalem: quare vt prius diametrũ costæ cõmensurabilem esse, duplámq; proportionem varias partes aliquotas rationales admittere cõprobaretur. Singula incõmoda quæ hanc fallacem Basani Politi sententiã sequuntur, si referre tentarem, ne magno quidem volumine traderentur: q; vix vnico theorematí de proportionibus aut proportionalitatibus ab Euclide cõ

ſcripto,ſit ea poſitio cōſona. Pauca hæc igitur obiter in caput vnum ſtrinxiſſe ſit ſatis:de quib⁹ nec meminiſſe ſtatueram,ni abſoluto opere in manus forte incidiſſet Volumnij Rodulphi de proportionum proportionibus diſputatio: qua antiquos renouās errores,Romæ congreſſione publica cunctos,qui etiā perſpicacioris iudicij cenſerētur, palinodiā(inquit)canere, & ei quam nuper improbauimus opinioni adhærere coegit. Nec idcirco ſanè ꝙ Romanos mathematicos ſua(vt inquit)hæreſi obruerit,ſibi gloriā peperiſſe credat,ſed verius vrbi dedecus. ¶Quò tādem tantæ hæreſeos fulcimina funditus euertātur,iuuabit erroris occaſionem exprimere:& eas quibus decipiūtur rationes diſſoluere. Hinc ergo ſcaturit omnis error, ꝙ exiſtimatum ſit proportiones vt numeros inter ſe multiplicari & diuidi poſſe:ob quod nō incautè ſibi dari poſtulat Volumnius,proportiones quātitatum rationem habere:quas tamen conſpicuum eſt ſub relationis genere colligi. Promouet ad rei huius comprobationem octauā noni elementorū Iordani,qua ad hunc modum ſcribitur. Omnis proportio ex duabus compoſita,ex ductu vnius earum in reliquam producitur. Campani ſubinde ſententiam ſuper decimam & vndecimam definitionem quinti Euclidis,qua inquit proportionem duplicatā,eſſe proportionem in ſe multiplicatam:& rurſus proportionē duplam in ſe multiplicatā, quadruplam efficere:triplamq; in ſe ductam,noncuplam reddere:& triplā in noncuplam,vigecuplam ſeptuplam. Ab his,ex quinta definitione ſexti teſtimonium adfert,qua ſic inquit Euclides. Proportio ex duabus aut pluribus proportionibus conſtare dicitur,quando proportionū quantitates multiplicatæ aliquam efficiūt quantitatem. His potiſſimum rationibus cōuincere videtur,triplam proportionem per duplam multiplicatam efficere ſextuplam duplam triplæ:ob idq; proportionem proportionum eſſe vt ſuarum denominationum. Eæ proculdubio celebrium virorum ſentētiæ vel mediocriter eruditum virum(quanto magis Volumnium) non modo ancipitem reddere,ſed & in errorē trahere poſſent,ni ex antè dictis elucidationē fuiſſent aſſequutæ. ¶Proportiones quidem multiplicatione ſuarū denominationū,inter ſe multiplicari,non ſic eſt accipiendū ꝙ producta proportio multiplex ſit ad aliquā multiplicantium,velut in numeris fit:ſed quæ ex multiplicatione oritur proportio ex multiplicatis in vnguem componi perhibetur. Id profecto Campanus & Iordanus ſentierunt:vt inquam ductis denominatoribus duplæ & triplæ,denominator ſextuplæ oriretur,quę ex illis cōficitur exactè:nam ſextupla quæ inter 6 & 1 eſt,ex tripla 6 ad 2,& dupla 2 ad 1 coaleſcit cōponiturq;. Id ipſum & Euclides manifeſtius expreſſit quinta definitione ſexti,ſignificās (ſi,gratia exempli,extrema triplæ 3 & 1 ſumātur:itemq; extrema quadruplæ 4 & 1)ex multiplicatione maiorū extremorum,12 prouenire maiorem quātitatem ſeu maius extremum duodecuplæ proportionis:hæc eſt ergo duodecupla quam ex quadrupla & tripla vult conſtare. An quis authorum dixerit proportionem quę ex ductu plurimū multiplicium proportionum fit:ad quāpiam earum multiplicē fieri? minime:ſed productā ex multiplicatis cōponi cōſtareq;. Etſi itaq; proportionū quantitates inter ſe ducātur,nequaquā tamē propria hæc eſt ipſarū proportionū multiplicatio,ſed verius quædā additio. Vt enim additis ternario & quaternario ſeptenarius fit ex illis aſſurgens:ita

Cur hoc caput ſit ceteris inſertū.

Quæ fuerit erroris occaſio.

Volumnij rationes.

Rationū diſſolutiones.

proculdubio tripla & quadrupla proportionibus iunctis, duodecupla sit ex illis vt suis partibus integrè constans. Vocauerunt nihilominus mathematici breuitatis gratia proportionũ multiplicationẽ, eam multiplicationẽ quæ est inter proportionũ extrema: hocq; ductu proportiones in vnam iunguntur, ac succrescunt extrema proportionis quæ ex illis cõponitur. Vt tandem summatim dicam, si quadrupla per triplam (impropriè tamen & extremorum multiplicatione) multiplicetur, nolunt Euclides, Iordanus, alijq; percelebres mathematici duodecuplam proportionem quæ hinc oritur, triplam esse quadruplæ: sed id vnicum innuunt duodecuplam ex tripla & quadrupla constitui. Id sanè authorum verba cuiq; vel parum perito statim aperiunt: quæ ob id longe maiori vehementia quàm iaculata sint mox in hostem vt tela quædam retorquentur, ipsumq; misere prosternunt confodiuntq;.

## ¶ Vt cuiusq; proportionalitatis termini statuantur, signeturq; proportio inter quasuis oblatas proportiones. Cap. V.

SVperest tria dubia impræsentiarum transigamus, quæ in simplicibus proportionibus olim discussa sunt: primum & tertiũ hoc capite aggressi. At quum indubitatò lõgè operosior magisq; ardua in proportionibus sit eiusmodi disquisitio q̃ simplicibus quantitatibus, oportunũ videbitur ad hæc documenta præmittere. Primũ, quacunq; proportione signata, possunt tres termini aut quatuor plurésve signari cõtinuè data proportione proportionales: & quorũ cuiusq; maioris ad proximũ minorem sit data proportio. Id autẽ effecerimus captis primis terminis datæ ꝓportionis, primũ in se ducẽdo, & eũdem rursus in secũdum, mox secũdum in se, qui nẽpè tres termini hinc oriẽtur proportionales erũt data proportione. Si demũ primus primorũ in quẽuis istorũ triũ ducatur, & secũdus in vltimũ, quatuor termini fiẽt eadem proportione proportionales. Pari arte si primus primorũ in quẽuis horũ quatuor, & secundus illorũ in vltimũ horum ducatur, quinq; fient proportionales termini. Hæc operatio est secũdæ octaui Euclidis, per 18 & 19 septimi demõstrata: in qua nunquã vnitas pro extremo proportionis est desumẽda, nec primi termini duplæ hoc loco dicẽtur vnitas & binarius: velut ex Euclide passim docemur. Rei exẽplum desumamus in proportione superbipartiẽtetertias: huius primi termini sunt 5 & 3, duco itaq; 3 in se, fitq; 9: duco eũdem 3 in 5, & oritur 15: ductus subinde 5 in se, 25 efficit: hi igitur tres termini 9 15 25 continuam habent proportionem, quæ est superbipartienstertias. Præterea ducto 3 in quẽuis horũ trium, fiũt hi tres numeri 27 45 75: & rursus multiplicãdo 5 in 25 fiunt 125: quatuor itaq; hi termini 27 45 75 125 se habẽt cõtinua ꝓportione, sic demũ ducẽs 3 in quẽlibet horũ quatuor, & 5 in vltimũ, quinq; numeros continuè proportionales cõflabis, proportione superbipartientetertias. similis prorsus est pluriũ terminorum cuiusq; proportionis procreatio. ¶ Secũdum documẽtum, potest proportionũ vt numerorũ ordo institui, quo subinde vt numeris ipsis erit vtendum. Fiet autem is ordo si quotcunq; termini cõtinuò proportionales quauis proportione tribuãtur, ex prẹcedenti documẽto: & secũdi ad primũ cognita proportio seorsum seruetur, & quæ tertij ad primũ, & quæ quarti omniumq; sequentiũ ad eundem primũ.

Quotcunq; terminos data ꝓportione rationales constituere.

Proportionum ordo cõstituitur.

Harũ tandem proportionũ denominationes ſuo ordine diſponãtur,& è regione numeri ab vnitate reſpõdenter adiaceãt,ita enim proportionũ ordinẽ numerorũ ordini ſimilẽ confeceris. Velut ſi ſumãtur hi octo termini proportionales proportione dupla 1 2 4 8 16 32 64 128,ſecundi ad primum eſt dupla proportio,tertij ad eũdem,quadrupla:quarti ad eundem,octupla:quinti ad eũdem,ſexdecupla:ſexti ad ipſummet primũ,trigecupla dupla:ſeptimi,ſexagecupla quadrupla:& tandem vltimi ad primũ centupla vigecupla octupla. Erit autẽ datarũ proportionũ cum adiacẽtibus numeris ſecũdum hũc modũ diſpoſitio.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | dupla | 1 |
| 2 | quadrupla | 2 |
| 4 | octupla | 3 |
| 8 | ſexdecupla | 4 |
| 16 | trigecupla dupla | 5 |
| 32 | ſexagecupla quadrupla | 6 |
| 64 | centupla vigecupla octupla. | 7 |
| 128 | | |

Rurſum ſumptis his quinq; numeris continuam proportionẽ ſeſqualterã habẽtibus,16 24 36 54 81,proportio ſecũdi ad primũ eſt ſeſqualtera: tertij ad eũdem,dupla ſeſquiquarta:quarti ad eundẽ,tripla ſupertripartienſoctauas:& poſtremò vltimi ad primũ,eſt proportio quincupla ſeſquidecima ſexta:erit proinde ſeſqualteræ proportionis ordo ſecũdum hanc diſpoſitionẽ.

| | | |
|---|---|---|
| 16 | ſeſqualtera | 1 |
| 24 | dupla ſeſquiquarta | 2 |
| 36 | tripla ſupertripartienſoctauas. | 3 |
| 54 | quincupla ſeſquidecimaſexta. | 4 |
| 81 | | |

¶ Tertium documentũ,cuiuſuis oblatæ proportionalitatis,& multiplicis & nõ multiplicis terminos vt præfigamus,oportet quẽpiam proportionũ ordinem ex præmiſſo documẽto conſtituere:& eouſq; extẽdere donec inter numeros collaterales primi termini datæ proportionis reperiãtur:ſtatimq; proportiones illis numeris è directo adiacẽtes eandem obſeruabũt proportionẽ:quæ erit prius quæſita ꝓportionalitas. Velut quum quærũtur ꝓportiones aliquæ inter quas ſit proportio ſeſquitertia,quum 4 & 3 primi huius proportionis termini in præexpoſito ordine cernãtur,illiſq; adiaceãt è regione ſexdecupla & octupla,dicẽdum eſt & harũ proportionum ſeſquitertiã eſſe proportionẽ. Ita octupla ad quadruplam,ſeſqualtera percipietur, & tripla ad duplam. In ſeſqualterarũ ordine tripla ſupertripartiẽſoctauas tripla eſt ad ſeſqualterã,& eadem eſt ſeſqualtera ad duplã ſeſquiquartã. Hęc ſingula ſtatim demõſtrare facile eſt,ꝙ omni proportionũ ordine,proportio quæ omniũ prima eſt & minima,ſit cuiuſq; ſequẽtis pars aliquota,vt vnitas cuiuſq; numeri. Omnis idcirco ſubſequẽs proportio,primam pluries inter ſua extrema colligit:ſecunda quidem,bis:tertia,ter:quarta,quater:quod vndecima definitione quinti tradidit Campanus. Erit proinde proportionũ eiuſdem ordinis ea inter ſe habitudo,qualis eſt adiacentiũ numerorũ:quare ſicut proportio omnis rationalis poteſt inter quoſdam numeros reperiri,ita eãdem inter aliquas proportiones rationales cõſtitui ex his eſt manifeſtũ.

Omnis proportionalitatis extrema ſignare.

¶ Quartum documẽtum,quum inter ſolas cõmẽſurabiles proportiones rationalis ſit proportionalitas, quibuſcũq; oblatis ꝓportionibus,vt earũ proportionalitas appareat,ſtatim cõſiderandũ eſt,an cõmenſurabiles ſint,an incõmenſurabiles: ꝙ ſi incõmenſurabiles viſæ ſint,dicẽda eſt earũ proportio irrationalis. Si vero cõmenſurabiles,erit inter eas rationalis ꝓportio:cuius denominatio dignoſcetur minoris earũ ordine conſtituto per ſecũdum documentũ:in quo ſi vtraq; proportio reperiatur,facile fuerit earum proportionem per adiacentes numeros declarare. At ſi in eo ordine maior datarũ proportionũ minime reponatur,oportet ordinẽ conſtituere à parte aliquota minoris proportionis. Idq; vnum tibi perſuade proportiones omnes cõmenſurabiles in eodem proportionũ ordine conſtitui. Si igitur in exẽplo proponantur tripla & ſeſqualtera,aut dupla & ſextupla,ſine mora pronunciãdum eſt illarũ proportiones irrationales eſſe. At ſi tripla &

Quarũcũq; proportionum commenſurabilium quænã ſit proportionalitas.

noncupla offerātur,triplæ proportionis ordine cōstituto,patebit earū duplā esse proportionem. Dum autē quadruplæ & octuplæ proportio exquiritur, cōstituto ordine quadruplæ,fiēt quadrupla,sexdecupla,sexagecupla quadrupla:inter quas octupla non reperitur:nec ob id existimandum est octuplæ & quadruplæ nullam esse rationalem proportionem:sed quum quadrupla medietatem habeat,quæ est dupla,ab hac ordo proportionum est inchoandus: reperietúrque octupla tertio loco quadruplam proximè sequens:quamobrem octuplæ ad quadruplā sesqualtera dicetur proportio. Satius ergo fuerit, dum ordinem quempiam proportionum cōponimus,à minima proportione illius ordinis incipere,quæ omnium maiorum pars est aliquota.

¶ Respectu datæ proportionis,alteram signare,quæ ad eam quamuis oblatam habeat proportionem rationalem. Cap. VI.

Quæ ꝓportionalitatis extrema.

Postremum dubium impræsentiarum cōuenit discutere:id dico ꝙ secundæ difficultati simplicium proportionum hic respondet. Non est autē existimādum quālibet rationalem proportionē posse cuiusꝗ proportionis rationalem proportionem suscipere:tripla siquidem nullā habet proportionē ad se sesqualterā aut sesquitertiā saltem rationalē. Proinde licet hoc loco tractatio sit solum de proportionalitate rationali,ea tamen pro suis extremis non modo proportiones habet,quarū vtraꝗ est rationalis:verū duas contingit habere irrationales,vt sesqualtera duplæ,quæ irrationalis est, triplā habet proportionē ad medietatē duplæ alterā irrationalē. Irrationalis quoꝗ cū rationali rationalē efficit proportionalitatē,vt sesqualtera duplæ cū dupla. Simile propè est in quātitatibus ipsis:nam lineæ quæ nullo pacto numeris exprimi possunt,rationalē quādoꝗ habēt proportionē:vt duorū quadratorum,quorū vnius costa bipedalis est,alterius vero costa quadrupedalis, diametri(vt costæ)dupla sunt proportione,quod ex decimasexta quinti Euclidis demōstrationē habet:sunt igitur diametri inter se cōmēsurabiles,etsi nulla earū possit numeris numerorúmve fractionibus declarari. Si eni exprimeret, quum iam costa expressa sit,diametri ad costā eiusdem quadrati rationalis esset proportio. Sed iam difficultatis huius sunto documēta. ¶ Primū documentū,omnis proportio supra se duplā triplā quadruplam & quāuis aliam multiplicē habet:etsi primo data sit rationalis,rationales erūt quoꝗ eius multiplices. Huius euidēs est ratio,quū quęlibet proportio duplari possit, triplari & quouis alio modo multiplicari,ceu pręmissum caput indicabat, proportionum ordine cōstituto. Sic igitur sesqualtera duplam habet,quæ est dupla sesquiquarta:& triplā,quæ est tripla supertripartiēsocta uas:hæcꝗ omnes rationales sunt à prima rationali cōfectæ. Huius rei demōstratio,ex eo quē instituimus proportionaliū quantitatū ordine,cōspicitur. Nam secunda & prima rationales sunt,tertia & secūda,itē quarta & tertia,per definitionē cōtinuę proportionalitatis. Quod si ita est,vt cuiusuis maioris quātitatis ad proximā minorē sit rationalis ꝓportio,erit per additionē ad octauā decimi Euclidis, cuiusꝗ maioris ad omniū minimā quātitatē,rationalis etiā proportio. At ex vndecima definitione quinti Euclidis,omniū sequentiū quantitatū proportio ad primā,multiplex est ad proportionē secūdæ ad primæ:quare assumptum

Omnis proportio omnem multiplicē habet.

verum eſt. In hunc modum ſuccinctè demonſtrationes perſtringere nos cogit tum loci tum tẽporis penuria. Quum nihilominus irrationalis eſt proportio, nequaquã oportet omnes eius multiplices irrationales eſſe. Præterea, medietas duplæ duplã ad ſe habet rationalem, & triplam irrationalẽ: ita tertia pars duplæ duplã habet irrationalẽ, triplam rationalẽ, & quadruplã irrationalẽ. ¶ Secũdum documẽtum, non omnis proportio rationalis ſubmultiplicẽ habet, ſuperparticularẽ aut ſuperpartientẽ rationalem: ſed ea ſolum quæ partẽ vel partes aliquotas habet rationales, quæ dictas proportiones valẽt denominare. Solã autẽ eã rationalẽ ante diximus partem habere aliquotã rationalẽ, inter cuius primos terminos vnus vel plures medij cadũt numeri Geometrica proportione cõtinuò proportionales. Ex his autẽ cognitu facillimũ eſt quadruplam proportionẽ, ſeſquitertiam ſupra ſe non admittere, caret enim tertia parte rationali: at eadem ſeſqualterã recipit, ꝙ medietatẽ habeat, quæ eſt dupla proportio: ob id ſi duplã quadruplæ iunxeris, octuplã reddes ſeſqualterã ad quadruplã. Eodem iure cẽſendum eſt octuplã (cuius tertia pars eſt dupla proportio) ſeſquitertia donari. Hinc rurſus deprehendere eſt, quæ proportio rationalẽ ſuperpartiẽtem habeat. Omnis enim quæ partẽ aliquotã rationalẽ ſuſcipit, ſuperpartiente donatur quæ ab ea parte poſtremã habet denominationem: quare octupla (cuius dupla eſt tertia pars) ſupra ſe quãdam habet ſuperpartientẽ, quippe trigecuplã duplã, cuius ad octuplã proportio eſt ſuperbipartienſtertias. Tertio, peruiũ ex hiſdem eſt quæ proportio multiplicẽ ſuperparticularẽ aut multiplicẽ ſuperpartientẽ recipere ſit apta. Quum nempè ex præmiſſo documẽto quælibet quãlibet multiplicẽ admittat, ſi ſimul pars aliquota ei nõ denegetur, ſicut ab ea parte ſuperparticularẽ habet, ita & multiplicẽ ſuperparticularẽ: & vt ſuperpartiẽte, ita multiplici ſuperpartiẽte donabitur. Quarto, dilucidum fit eã proportionẽ habere ſubmultiplicẽ, ſubſuperparticularẽ, aut ſubſuperpartiẽtem, quæ in tot partes aliquotas rationales eſt diuiſibilis, quot vnitates habet numerus maior primorũ terminorũ datę proportionis. Vt quum de trigecupla dupla ꝓportione inueſtigatur an ſubſuperbipartientẽtertias habeat, quũ primi termini huius proportionis ſint 5 & 3, poſſitq; trigecupla dupla in 5 partes aliquotas vt pote in 5 duplas diſtingui. dicẽdum eſt octuplã quæ tres duplas colligit, datã proportionẽ habere minoris inæqualitatis: eodem iure octupla ſubtriplã habet, nẽpè duplã: & ſubſeſqualteram, quæ eſt quadrupla proportio. ¶ Tertiũ documentũ, omnis proportio rationalis omnis generis proportionẽ admittit. volo dicere, quauis rationali proportione præſtituta, poſſum ad eam omnẽ multiplicẽ præfigere, & ſuperparticularẽ, & ſuperpartiẽtem, & cæteras tum maioris tum minoris inæqualitatis: quæ ſi nõ ſemper rationales ſint, ſaltem irrationales erũt. Huius demõſtratio euidens eſt, ꝙ quęlibet proportio ſit vt quãtitas cõtinua in quotcunq; partes aliquotas ſi nõ rationales ſaltẽ irrationales diuiſibilis. Addendo igitur partẽ vel partes aliquotas toti minori proportioni, ſuperparticularem efficiemus, aut ſuperpartientẽ, pro ratione & modo obſeruato in ſimplicibus proportionibus. Modus autẽ addẽdi hic eſt, numerator & denominator partis irrationalis addendæ, ſimul iungãtur: & rationalis proportio cuius illa eſt pars, toties ſumatur, quotus eſt numerus ex additione confectus: reſultantis

Quæ ꝓportio ſubmultiplicem habeat.

Corollaria.

Omnis proportio, omnis generis proportionem habet.

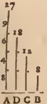
nempè proportionis(quæ semper rationalis est )pars à denominatore denominata,est quā quærimus. Vt si triplæ proportionis quæratur sesqualtera,cōuenit triplæ suā medietatē adiūgere:quapropter pars adiūgenda est $\frac{1}{2}$. Iungo igitur 1 cum 2,& quum 3 oriatur ter desumo triplā in hūc modum 1 3 9 27: prouenìens ꝓportio est vigecupla septupla,tripla triplæ,cuius medietas,quæ est irrationalis proportio,est sesqualtera triplæ. Nam tripli medietas,est sesqualtera simpli. Itē,si ad sesqualterā quæratur superbipartiēstertias,addēdæ quidē sunt ipsi sesqualteræ $\frac{2}{3}$ eius:iūctis numeratore & denominatore partis addēdæ 5 coalescūt:quinquies itaq; desumēda est sesqualtera,sic 32 48 72 108 162 243,fitq; extremi ad extremū proportio septupla superpartiēs nouēdecim trigesimas secūdas $\frac{243}{32}$:cuius $\frac{1}{3}$ est ea ꝓportio quā quærimus. Quincupli eni $\frac{1}{3}$, semel simplum & eius $\frac{2}{3}$ colligit:ex hisq; operationis demonstrationē licet venari. Huius nihilominus si forsan sedulius causam exposcis,te ad quantitatū operationē conuerte:quā huic similē agnosces. Nam si ternario 4 alios ternarios adieceris,vt 5 ternarij aggerētur,15 reddētes:orti quindenarij $\frac{1}{3}$ desumēs, quinariū cōperies:cuius ad 3 est oblata ꝓportio superbipartienstertias. Ergo vt in numeris seu proportionibus simplicib⁹ quinq; ternarios iūximus,ita in proportionū proportionibus quinq; triplas ꝓportiones iunxisse cōueniebat. Talis ergo fuerit modus operādi in superparticulari & superpartiēte. At in multiplici superparticulari & multiplici superpartiēte,priusquā ex documēto operemur,nobis oblata ꝓportio multiplicāda est:vt si ad duplā reperiēda est dupla sesqualtera debet dupla duplari,& procreatæ quadruplæ adiūgēda est medietas duplæ:fitq; proportio quæ dicitur quadrupla cum medietate duplæ,aut si mauis medietas trigecuplę duplę appellabitur. Potest id etiā aliter haberi,si omnes denominationes datæ ꝓportionis colligamus:& toties proportionē ipsam addamus suo minimo termino quotus est numerus ex additione prouenìēs:nam pars totius proportionis à denominatore nominata illa est quæ quæritur. Vt quærētes duplā superbipartientētertias,respectu duplæ iūgemus eiusce proportionis denominatores qui 7 reddent:quare 7 sumēdæ sunt duplæ,præter primā:ex his 7 cū prima fiet proportio,ducētupla quinquagecupla sexcupla,cuius tertia pars est ea quā quærimus,habēs ꝓportionē duplam superbipartientemtertias ad duplam. In proportionibus minoris inæqualitatis non tāta fuerit operis difficultas:quinimo res ipsa statim sese sensibus offeret. Nam si petatur subtripla quadruplæ,dicēdum est illā esse tertiā partē quadruplæ,cui hoc vnicū nomē est:ita subsesqualtera quadruplæ,erit $\frac{2}{3}$ quadruplæ,sic se habēs ad quadruplā,sicut 2 ad 3. & subsuperbipartiēstertias triplæ,erit proportio quæ dicitur $\frac{3}{5}$ triplæ: & eiusdem subdupla sesqualtera, dicetur $\frac{2}{7}$ triplæ. hoc modo est in singulis procedendum. Hinc clarū est omnē eam irrationalē proportionē,cuius hactenus meminimus,rationalis proportionis partē esse aliquotā,vel partes:nec aliæ vsquam reperiuntur in vsu. Sed de quacunq; rationali proportionalitate,siue inter ambas rationales proportiones,siue ambas irrationales,aut vna rationali,altera irrationali comperiatur,hactenus dictum sit abundè.

¶ Tres sæpius acceptæ dubitationes,in incommensurabilibus quantitatibus hic dissoluuntur. Cap. VII.

Quum incõmensurabilium quãtitatum proportio irrationalis, à rationali ꝓportione aliqua ex parte nomẽ habeat, multáq; ex ꝓportionalitatibus hic desiderẽtur, irrationalis proportionis disquisitioni videtur hic locus idoneus. Irrationalis autẽ proportio inter incõmensurabiles quãtitates reperitur: quarũ vtraq; aut saltẽ altera numeris, numerorúmve fractionibus exprimi nõ potest. Ob id licet raro veniat in vsum, vt irrationalẽ proportionẽ particulatim determinemus, id tamẽ dicere aggrediemur, ostẽdentes triũ dubitationũ dissolutionẽ hic nõ prorsus demõstratione carere: subijciẽtur autẽ pro more documẽta, quæ rem ipsam (etsi imprimis ardua sit & inuoluta) sigillatim edocebũt. ¶ Primũ documentũ, omnis finita magnitudo potest in quotvis partes quauis proportione ꝓportionales distribui, quod efficiemus sumptis aliquot terminis optatæ ꝓportionis, ad quorũ similitudinẽ magnitudinis partes disponemus. Vt si diuidendũ sit bipedaneũ corpus in quinq; partes proportionales ꝓportione dupla, quinq; primi termini eius proportionis colligẽtur in hũc modum 1 2 4 8 16, qui simul iuncti 31 cõponunt: diuiso proinde toto bipedaneo in 31 partes, prima pars proportionalis ex eis 16 cõprehendet, secũda, 8 earum: tertia, 4: quarta, 2: quinta, 1: hæq; pariter adiectæ totũ bipedaneum reddunt. Et si diuidendum sit in tres partes proportionales ꝓportione superbipartiẽtetertias, quum huius proportionis tres primi termini sint 9 15 25, qui simul iuncti 49 reddunt, si totũ bipedaneũ in 49 partes distribuatur, earũ 25 primã partẽ efficiẽt, 15 secũdam, & 9 tertiã.

Diuisio continui i quotuis partes rationales.

¶ Secundum documentum, inter quascunq; duas magnitudines finitas & inæquales, possunt quotcũq; aliæ proportionales reperiri: si excessus maioris supra minorẽ diuidatur in partes proportionales ea proportione, quæ est pars proportionis quã habet magnitudo maior ad minorẽ. Propositis itaq; A & B quãtitatibus, quarũ A sit pedum 27, B pedum 8: si lubet duas quãtitates proportionaliter medias inter A & B reperire, excessus A super B, qui est 19 pedũ, in tres partes diuidetur ꝓportionales proportione sesquialtera, quæ est tertia pars triplæ supertripartiẽtisoctauas, proportionis scilicet A ad B: fietq; prima pars 9 pedum, secunda 6 pedum, tertia 4 pedum. Harum partiũ minimam (quæ 4 pedum est) addens minimæ omnium quantitati (quæ est 8 pedum) C quãtitatem 12 pedum cõpono: hinc rursus alterã partẽ proportionalẽ 6 pedum adijciẽs, D quantitatẽ procreo 18 pedum. Nunc autem sicut A ad D, sic D ad C, & C ad B: quare D & C inter A & B proportionales erũt. Demonstratur hæc operatio: nam si proportio A & B in tres partes diuidatur, illarumq; partium D & C termini medij cõstituãtur, cõstat eos terminos ꝓportionales esse: quum proportio A ad D sit $\frac{1}{3}$ totius proportionis, similiter D ad C, & C ad B. Hac igitur arte inter quascũq; duas inæquales magnitudines poterit vna aut duæ pluresve ꝓportionales cõstitui: quod Euclides de vna tãtum proposuit, nona sexti.




¶ Tertium documentũ, quauis data irrationali proportione, magnitudines signari possunt, inter quas ea cõstituetur. Data enim proportione quæ est quarta pars quincuplæ, vt quãtitates & extrema illius proportionis noscãtur, A & B magnitudines quincuplam proportionẽ habebũt: inter quas ex præmisso documẽto, tres proportionales magnitudines C D E cadere da-

Primi dubij dissolutio.

buntur: fiéntq; A & C extrema datæ irrationalis proportionis, sic C & D, D & E, E & B. Rursum inter A & D medietas erit quincuplæ: inter A & E proportio est appellata $\frac{3}{4}$ quincuplæ. Medietas superbipartiẽtistertias terminos notos habebit, si inter A & B terminos illius proportionis, ponatur C quãtitas media proportionaliter. Proportio demũ vocata $\frac{2}{3}$ superbipartiẽtistertias, nota euadet si inter A & B proportionaliter cadant C & D: nam A & D extrema fient illius proportionis. Nemo rem paruipendat q̧ magnitudines numeris non exprimãtur: id enim in plerisq; fieri nequit: sed abundè suffecerit magnitudines ipsas geometrico more subijcere, palam conspiciendas. ¶ Quartum

Secũdi dubij dissolutio.

documentum, data magnitudine potest altera præstitui, quæ optatã proportionem irrationalẽ seruet ad illã. Velut proposita B magnitudine 4 pedum, inueniemus magnitudinẽ quæ ad B eam irrationalem proportionẽ habeat, quã dicunt $\frac{2}{3}$ sesqualteræ: hoc autẽ si A magnitudo 6 pedum ad B fiat sesqualtera, inter quas C & D cadant proportionaliter mediæ: tunc nempè quum sesqualtera proportio in tres partes distincta sit, proportio C ad B duas illarum cõprehendet: quare respectu B magnitudinis inuẽta est C magnitudo datam habens proportionẽ, quæ est $\frac{2}{3}$ sesqualteræ. ¶ Quintum documentũ, duabus

Tertij dubij dissolutio.

quibusq; magnitudinibus irrationalibus propositis, nosci potest quã inter se irrationalem proportionalẽ habeant. Si nempè eæ magnitudines sint A & B, C tertia quæretur illis cõtinuò proportionalis per 10 sexti: item D quarta magnitudo cõtinua proportionalitate illis subiungetur, & E quinta: idq; cõtinuò fiet donec aliqua reperiatur omniũ primę rationalis (tãdem enim oportet aliquam reperiri) si ea igitur fuerit D quarta ad quam A noncuplã proportionẽ habeat, notũ statim fit inter A & B primo datas magnitudines esse proportionem irrationalẽ, quæ est $\frac{1}{3}$ noncuplæ. Quòd si forsan eum processum ad nullã magnitudinẽ rationalem primæ perduxeris, vix primarũ magnitudinũ poterit proportio enũciari: erit nempè alterius irrationalis pars aliquota. Non est ex his causandum si datarũ magnitudinũ proportio à pluribus partibus aliquotis alicuius rationalis nominetur, eã ob id nõ posse hac via reperiri: nam quæcũq; partes aliquotæ alicuius totius, sunt alterius vna pars aliquota. Etsi ergo proportio inter A & B sit $\frac{2}{3}$ triplæ, id nõ impediet quo minus eadem etiã dicatur $\frac{1}{3}$ noncuplæ: q̧ $\frac{2}{3}$ triplæ $\frac{1}{3}$ noncuplæ sint. Proindè nullarum irrationalium magnitudinũ nõ poterit irrationalis proportio per hæc haberi. ¶ Tres

Operis conclusio.

itaq; dubitatiões quas principio sumpsimus discutiẽdas, hactenus dissoluisse videor, primo in rationalibus proportionibus, mox in rationalibus proportionalitatibus, & postremo in irrationalibus proportionibus. Irrationalium proportionalitatum nullus est vsus: his proindè abiectis proportionum traditio finem hic est assecuta. At si quis etiam irrationalium proportionalitatum optet cognitionẽ, is tria quæ nouissime tradidimus documenta secutus, earum vt irrationalium proportionum doctrinam efficiet, euidentem rei demonstrationem pariter nactus.

¶ LIBELLORVM DE PROPORTIONIBVS, IOANNE Fernelio Ambianate authore, finis.

FINE